Издательство «Легион»

Виды экономических задач и способы их решения

Дерезин Святослав Викторович

8 декабря 2016 г.

План вебинара

- Демоверсия ЕГЭ–2017
- Задачи на проценты, доли, части
- Задачи на кредиты, вклады, ссуды, заёмы
- Задачи на экстремальные свойства функций
- Задачи на свойства целых чисел

1. 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Решение:

По условию, долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1;\ 0{,}6;\ 0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0.$$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен

$$k;\ 0{,}6k;\ 0{,}4k;\ 0{,}3k;\ 0{,}2k;\ 0{,}1k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k - 0{,}6;\ 0{,}6k - 0{,}4;\ 0{,}4k - 0{,}3;\ 0{,}3k - 0{,}2;\ 0{,}2k - 0{,}1;\ 0{,}1k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$k(1+0{,}6+0{,}4+0{,}3+0{,}2+0{,}1)-(0{,}6+0{,}4+0{,}3+0{,}2+0{,}1)=$$

$$=(k-1)(1+0{,}6+0{,}4+0{,}3+0{,}2+0{,}1)+1=2{,}6(k-1)+1.$$

По условию, общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей, значит,

$$2{,}6(k-1)+1<1{,}2;\ \ 2{,}6\cdot\frac{r}{100}+1<1{,}2;\ \ r<7\frac{9}{13}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 7. Значит, искомое число процентов — 7.

Ответ: 7.

Критерии

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Новое издание книги по экономической задаче

Проценты, доли, части

A_0 — первоначальная сумма; $x\%$ — начисляемый процент в конце периода (месяц, квартал, год и т.п.); m — число периодов, A_m — сумма через m периодов.

Простые проценты:

$$A_m = \left(1 + m \cdot \frac{x}{100}\right) A_0.$$

Сложные проценты:

$$A_m = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^m A_0.$$

2. Магазин увеличил цену товара в 8 раз. Однако по результатам проверки антимонопольная служба предписала вернуть прежнюю цену. На сколько процентов придётся снизить цену?

Решение:

Пусть изначально товар стоил x рублей.
Тогда после подорожания он стал стоить 8x рублей.
По результатам проверки цена снизилась на 7x, что составляет $\frac{7x}{8x} \cdot 100\% = 87{,}5\%$ от суммы 8x рублей.

Ответ: 87,5.

3. Предприниматель обратился в банк с просьбой о предоставлении ссуды в размере 1 000 000 рублей сроком на 1 год. Банк выделил ему эту ссуду с годовой процентной ставкой в 20% при условии погашения ссуды одним платежом в конце срока. Какую сумму должен через год возвратить предприниматель банку? Какие процентные деньги получит банк?

Решение:

Через год предприниматель должен вернуть банку

$$1\,000\,000 \cdot 1{,}2 = 1\,200\,000 \text{ (рублей)},$$

банк на этом заработает

$$1\,200\,000 - 1\,000\,000 = 200\,000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 1 200 000 рублей; 200 000 рублей.

4. Клиент взял в банке кредит 18 000 рублей на год под 14%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Решение:

Клиент будет вносить ежемесячно

$$\frac{18\,000 \cdot 1{,}14}{12} = \frac{20\,520}{12} = 1710 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 1710 рублей.

5. Заём в размере 64 тыс. рублей был выдан на 3 года под 25% годовых. Если отдать этот заём одним платежом, каков размер этого платежа?

Решение:

$$64\,000 \cdot \left(1 + \frac{25}{100}\right)^3 = 64\,000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 = 64\,000 \cdot \frac{125}{64} = 125\,000.$$

Ответ: 125 тыс. рублей.

6. 15-го января был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг (ТД) выражается в процентах от кредита.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
ТД	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 4%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение:

Пусть S — сумма кредита; x_1, x_2, …, x_6 — выплаты в первой половине февраля, марта и т.д. Составим уравнения, которые отражают график погашения кредита.

$$\begin{aligned}
&\text{На } 15.02: && 1{,}04S - x_1 = 0{,}9S,\\
&\text{На } 15.03: && 1{,}04 \cdot 0{,}9S - x_2 = 0{,}8S,\\
&\text{На } 15.04: && 1{,}04 \cdot 0{,}8S - x_3 = 0{,}7S,\\
&\text{На } 15.05: && 1{,}04 \cdot 0{,}7S - x_4 = 0{,}6S,\\
&\text{На } 15.06: && 1{,}04 \cdot 0{,}6S - x_5 = 0{,}5S,\\
&\text{На } 15.07: && 1{,}04 \cdot 0{,}5S - x_6 = 0.
\end{aligned}$$

Сложим все уравнения.

Кредит-таблица

$1{,}04S\cdot(1+0{,}9+\ldots+0{,}5)-(x_1+x_2+\ldots+x_6) = S\cdot(0{,}9+0{,}8+\ldots+0{,}5).$

Пусть $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_6$ — общая сумма выплат.

Поскольку $5 + 6 + \ldots + 9 = \dfrac{5+9}{2} \cdot 5 = 35$, имеем уравнение

$$1{,}04S \cdot 4{,}5 - X = S \cdot 3{,}5,$$

$$X = S \cdot (1{,}04 \cdot 4{,}5 - 3{,}5) = 1{,}18S.$$

Таким образом, общая сумма выплат на 18% больше суммы самого кредита.

Ответ: 18.

Схема с дифференцированными платежами (СДП)

Эта методика расчёта платежей по потребительским кредитам базируется на использовании убывающей арифметической прогрессии. Процентный платёж за пользование потребительским кредитом обычно вычисляется «вперёд»: для первого месяца процентный платёж рассчитывается на всю величину долга, а в каждый следующий месяц — на остаток долга, т.е. величину долга, уменьшенную на уже выплаченную часть.

СДП в виде таблицы

7. Величина кредита — 12000 руб. Процентная ставка — 12% годовых (или 1% в месяц), срок погашения — 6 месяцев. Составить план погашения кредита по схеме с дифференцированными платежами.

Решение:

месяц	долг	процентный платёж	выплата долга	месячный взнос
	12000	12%		
1	10000	120	2000	2120
2	8000	100	2000	2100
3	6000	80	2000	2080
4	4000	60	2000	2060
5	2000	40	2000	2040
6	—	20	2000	2020
		420	12000	12420

8. Клиент взял 15 960 000 рублей в кредит под 30% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 30%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение:

Пусть искомый ежегодный платёж составляет x рублей. Тогда в конце первого года клиент будет должен

$$1{,}3 \cdot 15\,960\,000 - x = (20\,748\,000 - x) \text{ рублей.}$$

Аннуитетная схема

Аналогично, в конце второго года его долг составит

$$(1{,}3 \cdot (20\,748\,000 - x) - x) = 26\,972\,400 - 2{,}3x \text{ рублей,}$$

а к концу третьего

$$1{,}3 \cdot (26\,972\,400 - 2{,}3x) - x = 35\,064\,120 - 3{,}99x \text{ рублей.}$$

Однако по условию клиент должен выплатить кредит тремя равными платежами, то есть в конце третьего года его долг должен составить 0 рублей.

$$35\,064\,120 - 3{,}99x = 0, \ \ x = 8\,788\,000.$$

Ответ: 8 788 000 рублей.

9. Первый банк предлагает открыть вклад с процентной ставкой 8%, второй — 10%. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Клиент сделал одинаковые вклады в оба банка. Через два года второй банк уменьшил процентную ставку по вкладу с 10 до P процентов. Ещё через год клиент закрыл оба вклада и забрал все накопившиеся средства. Оказалось, что второй банк принёс ему больший доход, чем первый. Найдите наименьшее целое P, при котором это возможно.

Решение:

Пусть в каждом банке клиент открыл вклад в размере X рублей. Тогда через 3 года на счёте в первом банке будет

$$(1{,}08)^3 X,$$

а на счёте во втором банке будет

$$(1{,}1)^2 \cdot (1 + P/100) X.$$

Вклады

По условию второй вклад принёс больший доход, это значит, что в момент закрытия на втором счёте было больше средств:

$$(1{,}08)^3 X < (1{,}1)^2 \cdot (1 + P/100) X,$$

$$(1{,}08)^3 < (1{,}1)^2 \cdot (1 + P/100),$$

$$\frac{(1{,}08)^3}{(1{,}1)^2} < 1 + P/100,$$

$$1{,}041\ldots < 1 + P/100,$$

$$4{,}1\ldots < P.$$

Наименьшее целое число, удовлетворяющее этому равенству: $P = 5$.

Ответ: 5.

10. Клиент сделал вклад в банке в размере 200 тысяч рублей со ставкой 10%. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Клиент хочет в начале 3-го и 4-го года пополнить вклад на одно и то же целое число тысяч рублей (назовём это пополнение вклада довклад) так, чтобы к концу 4-го года по вкладу было начислено не менее 100 тысяч рублей. При каком наименьшем размере довклада это возможно?

Решение:

Обозначим размер довклада за x тысяч рублей. Изначальный вклад к концу 4-го года станет равным $200 \cdot (1{,}1)^4$ тысяч рублей. Довклад, сделанный в начале 3-го года, — $x \cdot (1{,}1)^2$ тысяч рублей. А довклад, сделанный в начале 4-го года, — $x \cdot 1{,}1$ тысяч рублей. Тогда через 4 года у него на счёте будет

$$200 \cdot (1{,}1)^4 + x \cdot (1{,}1)^2 + x \cdot 1{,}1 \text{ (тысяч рублей)}.$$

Вклады

Начисления по вкладу составят

$$200 \cdot (1{,}1)^4 + x \cdot (1{,}1)^2 + x \cdot 1{,}1 - (200 + 2x) \text{ (тысяч рублей).}$$

Начисления должны быть не меньше 100 тысяч рублей, поэтому

$$200 \cdot (1{,}1)^4 + x \cdot (1{,}1)^2 + x \cdot 1{,}1 - (200 + 2x) \geqslant 100,$$

$$0{,}31x + 92{,}82 \geqslant 100,$$

$$0{,}31x \geqslant 7{,}18,$$

$$x \geqslant 23{,}1\ldots.$$

Наименьшее целое x, при котором это неравенство верное: $x = 24$.

Ответ: 24 тысячи рублей.

11. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Решение:

Прибыль:

$$f(x) = px - (0{,}5x^2 + 2x + 6) = -0{,}5x^2 + (p - 2)x - 6,$$

Вершина параболы:

$$x_0 = p - 2, \; y_0 = \frac{1}{2}\Big((p - 2)^2 - 12\Big),$$

Условие окупаемости:

$$3y_0 \geqslant 78, \; p = 10.$$

Ответ: 10.

12. Зависимость объема Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 12000 - P$, $2000 \leqslant P \leqslant 12000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $2500Q + 1000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 60%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение:

Прибыль:

$$f(P) = PQ - (2500Q + 1000000) = -P^2 + 14500P - 31000000.$$

Пусть первоначальная цена равнялась P_0. После снижения на 60% цена стала равняться $0{,}4P_0$. Графиком функции $y = f(P)$ является парабола с ветвями, направленными вниз, поэтому наибольшее значение прибыль будет достигать в вершине параболы. Так как $f(P_0) = f(0{,}4P_0)$, то вершина параболы будет находиться в точке $\dfrac{P_0 + 0{,}4P_0}{2} = 0{,}7P_0$. Это означает, что нужно увеличить цену товара с $0{,}4P_0$ до $0{,}7P_0$, то есть на

$$\frac{0{,}7P_0 - 0{,}4P_0}{0{,}4P_0} \cdot 100\% = 75\%.$$

Ответ: 75.

13. Крупный бизнесмен является владельцем двух заводов, выпускающих одинаковую продукцию. На втором заводе используется более современное оборудование, позволяющее за одинаковое время с первым заводом производить больше продукции, чем на первом заводе. Известно, что если рабочие первого завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $2t$ единиц товара. А если рабочие второго завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $5t$ единиц товара. На обоих заводах за каждый час работы рабочему платят 500 рублей. Какое наибольшее число единиц продукции можно будет выпустить на обоих заводах при условии, что заработную плату на предстоящую неделю можно будет выплатить в размере 1 450 000 рублей?

Решение:

Пусть суммарное недельное рабочее время на первом заводе равно x^2, а на втором заводе y^2. Тогда, согласно условию задачи, на заводах произведут соответственно $2x$ и $5y$ единиц продукции, а суммарное количество будет $K = 2x + 5y$. Согласно условию, за эту работу надо оплатить рабочим сумму $(x^2 + y^2) \cdot 500$ рублей. Так как есть возможность оплатить 1 450 000 рублей, то

$$(x^2 + y^2) \cdot 500 = 1\ 450\ 000,$$

$$x^2 + y^2 = 2900,\ \ y^2 = 2900 - x^2,$$

$$K(x) = 2x + 5y = 2x + 5 \cdot \sqrt{2900 - x^2}.$$

Применение производной (ЕГЭ–2015)

Найдем наименьшее значение K(x) с помощью производной.

$$K'(x) = 2 - \frac{5 \cdot 2x}{2\sqrt{2900 - x^2}},$$

$$K'(x) = 0,\ \ 2 - \frac{5x}{2900 - x^2} = 0,$$

$$2\sqrt{2900 - x^2} = 5x,\ \ 4(2900 - x^2) = 25x^2,\ \ x^2 = 400,\ \ x = 20.$$

Заметим, что $K'(x) > 0$ при $x < 20$ и $K'(x) < 0$ при $x > 20$, поэтому в точке $x = 20$ будет наибольшее значение.

$$y = \sqrt{2900 - x^2},\ \ y = 50,$$

$$K(20) = 2 \cdot 20 + 5 \cdot 50 = 290.$$

Ответ: 290.

14. В июле 2017 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг	S	0,75S	0,3S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Решение:

Долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на июль каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$S;\ 0{,}75S;\ 0{,}3S;\ 0.$$

По условию в январе каждого года долг увеличивается на 20%, значит, долг в январе каждого года равен

$$1{,}2S;\ 0{,}84S;\ 0{,}36S.$$

Следовательно, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют:

$$0{,}45S;\ 0{,}54S;\ 0{,}36S.$$

По условию числа

$$S;\ \frac{9S}{20};\ \frac{27S}{50};\ \frac{9S}{25}$$

должны быть целыми. Значит, число S должно делиться на 20, 50 и 25. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 100.

Ответ: 100 тысяч рублей.

Новое издание книги по экономической задаче

Спасибо за внимание!