Подготовка к ЕГЭ 2017. Требования к оформлению задач с развернутым ответом на ЕГЭ глазами эксперта предметной комиссии

Дерезин Святослав Викторович

4 мая 2017 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2017 года

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОЦЕНИВАНИЮ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

Москва
2017

Задание 13

Задача 13 (демонстрационный вариант 2017 г).

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x;\ 2\sin^2 x - \sin x = 0;\ \sin x(2\sin x - 1) = 0,$$

откуда $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

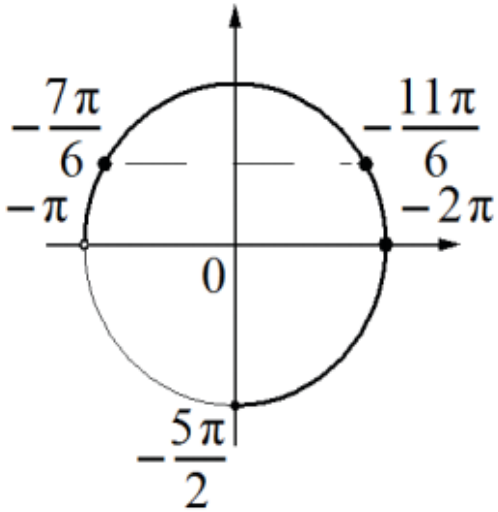
Из уравнения $\sin x = 0$ находим: $x = \pi n$, где $n \in \square$.

Из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ находим: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \square$.

Задание 13

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Получаем числа: -2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.



Ответ: а) πn, $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) -2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

Комментарий. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Задание 13

Содержание критерия, №15 ЕГЭ–2015	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Небольшое уточнение с «неверный ответ» до «неверные ответы» подчеркивает тот факт, что 1 балл допускается ставить в тех случаях, когда единственная вычислительная ошибка (описка) стала причиной того, что неверны оба ответа, полученные при выполнении п. *а* и п. *б*.

Сохранена такая структура критериев и в 2017 г.

Задание 13

Возвращаясь к критериям, если:

(1) уравнение (см. пример выше) верно сведено к простейшим тригонометрическим уравнениям $\sin x = 0$ и $\sin x = 0,5$;

(2) эти простейшие уравнения не решены или решены с ошибкой;

(3) но при этом отбор корней исходного уравнения верно произведён с помощью тригонометрической окружности, а не по неверно найденным корням простейших тригонометрических уравнений, то по критериям можно выставить 1 балл (получен верный ответ в п. *б*, а его получение обосновано верным сведением к простейшим уравнениям).

В то же время, при наличии (1) и (2) и «верного» отбора по неверно решенным простейшим уравнениям следует выставлять 0 баллов: любые ошибки, допущенные в тригонометрических формулах, в нахождении значений тригонометрических функций не относятся к вычислительным.

Задание 14

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

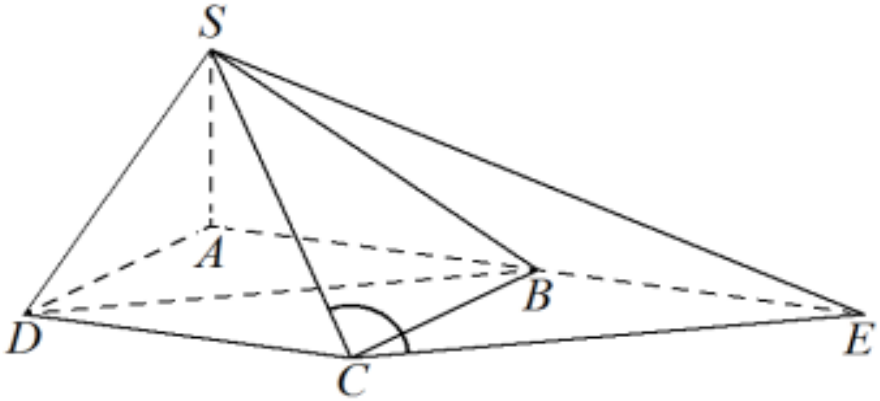
Задание 1 (№16, ЕГЭ 2015 г).

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

Решение.



а) В треугольнике SAB имеем:

$$SB^2 = 85 = 21 + 64 = SA^2 + AB^2,$$

поэтому треугольник SAB прямоугольный с гипотенузой SB и прямым углом SAB. Аналогично, из равенства

$$SD^2 = 57 = 21 + 36 = SA^2 + AD^2$$

получаем, что $\angle SAD = 90°$. Так как прямая SA перпендикулярна прямым AB и AD, прямая SA перпендикулярна плоскости ABD.

б) На прямой AB отметим такую точку E, что $BDCE$ — параллелограмм, тогда $BE = DC = AB$ и $DB = CE$. Найдём угол SCE. По теореме Пифагора:

$$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10;\ SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 11 \text{ и } SE^2 = SA^2 + AE^2 = 277.$$

По теореме косинусов:

$$SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2SC \cdot CE \cdot \cos\angle SCE;\ 277 = 121 + 100 - 220\cos\angle SCE;$$

$$\cos\angle SCE = -\frac{14}{55}.$$

Искомый угол равен $\arccos\frac{14}{55}$. **Ответ**: б) $\arccos\frac{14}{55}$.

Задание 14

Содержание критерия, задание №14 (=16), 2015 и 2016 г.	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* И обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 14

Пункт *а* в заданиях 14 может по разному соотноситься с пунктом *б*. А именно, он может быть утверждением независимым от *б*, дополняющим или проверяющим понимание общей конструкции. Возможен и второй вариант, когда в пункте *а* следует доказать утверждение, необходимое для полной корректности вычислений в пункте *б*. В первой ситуации независимость условий *а* и *б* приводит и к независимости проверки их выполнения. Во второй ситуации вполне может встретиться примерно следующий текст.

«*Задание 16……* . *а) Докажите, что…; б) Найдите площадь….*
Решение.
У меня а) не получилось. Используем а) при решении б)… далее верное и обоснованное (без выполнения пункта *а*) вычисление……».

Хуже того, вместо честного признания о «нерешаемости» *а* может быть предъявлено неполное и, даже, неверное доказательство. И в том, и в другом случае за верное решение пункта *б* <u>следует выставлять 1 балл.</u> Позиция разработчиков КИМ состоит в том, что в первую очередь следует поощрять за достижения, а не наказывать за промахи. Тем самым, часть «обоснованно получен верный ответ в пункте *б*» критерия на 1 балл более точно было бы сформулировать как «обоснованно (по модулю п. *а*) получен верный ответ в пункте *б*».

Задача 1.

Решите неравенство $\frac{2}{7^x-7} \geq \frac{5}{7^x-4}$.

Ответ: $(-\infty; \log_7 4), (1; \log_7 9]$.

Решение. Относительно $t = 7^x$ неравенство имеет вид:

$$\frac{2}{t-7} \geq \frac{5}{t-4}, \quad \frac{2(t-4)-5(t-7)}{(t-7)(t-4)} \geq 0, \quad \frac{-3t+27}{(t-7)(t-4)} \geq 0, \quad \frac{t-9}{(t-7)(t-4)} \leq 0,$$

откуда $t < 4$ или $7 < t \leq 9$. Возвращаясь к x, получаем: $7^x < 4$, $x < \log_7 4$ или $7 < 7^x \leq 9$, $1 < x \leq \log_7 9$.

Ответ: $(-\infty; \log_7 4) \cup (1; \log_7 9]$.

Задание 15

Содержание критерия №17 (ЕГЭ – 2015)	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 15

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «$<$» вместо «$\leq$», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

Вот как выглядят в данном случае критерии выставления 1 балла.

«Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного ответа исключением точки $x = \log_7 9$; *ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения».*

При включении в ответ $x = \log_7 4$ или $x = 1$ ставится оценка «0 баллов».

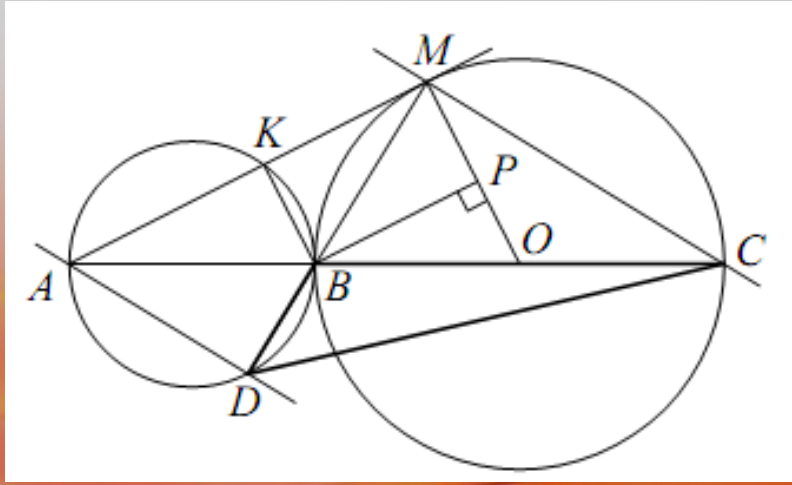
Задание 16

Задача 1

Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.



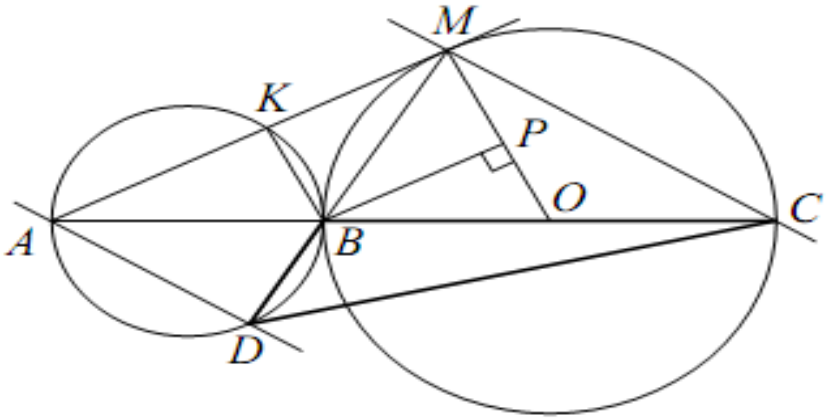
Задание 16

Решение.

а) Точки M и D лежат на окружностях с диаметрами BC и AB соответственно, поэтому

$$\angle BMC = \angle BDA = 90^\circ.$$

Прямые AD и MC перпендикулярны одной и той же прямой MD, следовательно, прямые AD и MC параллельны.



б) Пусть O — центр окружности с диаметром BC. Тогда прямые OM и AM перпендикулярны. Учитывая, что прямые BK и AM перпендикулярны, получаем, что прямые OM и BK параллельны. Обозначим BK через x. Треугольник AMO подобен треугольнику AKB с коэффициентом 5, поэтому $OB = OM = 5x$.

Опустим перпендикуляр BP из точки B на прямую OM. Так как четырёхугольник $BKMP$ — прямоугольник,

$$BP = KM = 12,\ OP = OM - MP = OM - BK = 5x - x = 4x.$$

По теореме Пифагора $OB^2 = BP^2 + OP^2$, откуда $25x^2 = 144 + 16x^2$. Получаем, что $x = 4$.

Поскольку прямые AD и MC параллельны,

$$S_{DBC} = S_{MDC} - S_{MBC} = S_{MAC} - S_{MBC} = S_{ABM}.$$

Значит, треугольники DBC и AMB равновелики. Следовательно,

$$S_{DBC} = S_{AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 15x = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4 = 30.$$

Ответ: б) 30.

Задание 16

Содержание критерия, задание №16 (=18), 2016 г.	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 16

Как и во всякой сложной геометрической задаче, весьма деликатным является вопрос о степени и характере обоснованности построений и утверждений. Позиция разработчиков КИМ состоит в том, что при решении задания №16 (=18=С4) невозможно от выпускников школ на экзамене требовать изложения, приближающегося к стилю учебников и методических статей. Достаточным является наличие ясного понимания геометрических конфигураций искомых объектов, верного описания (предъявления) этих конфигураций и грамотно проведённых рассуждений и вычислений. Обратим также внимание на то, что часто при решении геометрических задач школьники ссылаются на весьма невразумительный чертёж, а иногда чертёж вообще отсутствует (если рисунок сделан на бланке карандашом, то эта область не сканируется). Снижать оценку только за это не рекомендуется.

Задание 17

Задача 2.

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение. Пусть 15-го числа текущего месяца долг равен x, а 15-го числа предыдущего месяца долг равен y. Тогда в конце предыдущего месяца долг равен $1,05y$ и поэтому выплата в первой половине текущего месяца равна $1,05y - x$.

Значит, в процентах от суммы кредита выплаты в феврале составили $1,05 \cdot 100 - 90 = 15\%$, в марте составили $1,05 \cdot 90 - 80 = 14,5\%$, в апреле – 14%, в мае – 13,5%, в июне – 13%, а в июле $1,05 \cdot 50 = 52,5\%$. Следовательно, общая сумма выплат составила $28 + 28 + 14 + 52,5 = 122,5\%$.

Ответ: 22,5.

Задание 17

Содержание критерия, задание 17 (=19)	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 17

Несколько подробнее, 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условия выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Задача 1

Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} yx^2+y^2=2y+63-7x^2, \\ x\ge -3 \\ x+y=a \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Решение.

Решим первое уравнение:

$$yx^2+y^2=2y+63-7x^2, \qquad yx^2+7x^2+y^2-2y-63=0, \qquad x^2(y+7)+(y+7)(y-9)$$

$$(y+7)(y+x^2-9)=0, \quad y_1=-7, \quad y_2=9-x^2.$$

Рассмотрим случай (1): $y=-7$. При любом a получаем одно решение $x=a+7$, для которого неравенство $x\ge -3$ верно только при $a\ge -10$.

Рассмотрим случай (2): $y=9-x^2$, $9-x^2=a-x$, $x^2-x+(a-9)=0$. Так как $D=1-4(a-9)=37-4a$, то при $a>9,25$ корней нет, при $a=9,25$ получаем один корень $x=0,5$, при $a<9,25$ получаем два различных корня. У параболы $y=x^2-x+(a-9)$ - ветви вверх, абсцисса вершины равна $0,5>0$ и $y(-3)=3+a$. Значит, оба корня не меньше -3 при $3+a\ge 0$, т.е. при $-3\le a<9,25$, а при $a<-3$ один корень меньше -3, а другой – больше -3.

Задание 18

Соберем сведения о числе решений в случаях (1) и (2) в таблице

a	$a<-10$	$-10\le a<-3$	$-3\le a<9{,}25$	$a=9{,}25$	$a>9{,}25$
Число решений (1)	0	1	1	1	1
Число решений (2)	1	1	2	1	0

Остается учесть те значения a, при которых решение из случая (1) совпадает с одним из решений случая (2). Тогда $y=-7=9-x^2$, $x=\pm 4$, и из $x+y=a$, $x\ge -3$ получаем, что $x=4$, $a=-3$.

Ответ: $-10\le a\le -3$, $a=9{,}25$.

Задание 18

Содержание критерия, задача №20, ЕГЭ-2015	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, отличающийся от верного на одно или оба из значений $a=-10$, $a=-3$.	3
Обоснованно получено, что условие задачи выполняется хотя бы в одном из случаев $-10<a<-3$ или $a=9,25$.	2
Задача верно сведена к исследованию расположения парабол и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 19

Задача 3.

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

Задание 19

Решение.

а) Например, для групп $\{2, 3, 16\}$ и $\{6, 8\}$ средние значения равны 7.

б) Допустим, что это возможно. Пусть все средние значения равны c. В каждой группе от 1 до 8 натуральных чисел, поэтому $c = \frac{a}{b}$, где a — натуральное число и $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. С другой стороны, пусть группы состоят из n, m и k чисел. Тогда суммы чисел в группах равны nc, mc и kc соответственно, а общая сумма всех 10 чисел равна 61 и равна $(n + m + k)c = 10c$. Поэтому $10c = 61$; $c = \frac{61}{10}$. Это противоречит тому, что знаменатель числа c не превосходит 8.

в) Пусть группы состоят из n, m и k чисел, а средние значения равны c_1, c_2 и c_3 соответственно. Если $c_1 < 6{,}1$, $c_2 < 6{,}1$, $c_3 < 6{,}1$, то

$$nc_1 + mc_2 + kc_3 < (n+m+k)\cdot 6{,}1 = 61,$$

что противоречит условию. Значит, хотя бы одно из чисел c_1, c_2, c_3 не меньше 6,1. Поэтому максимальное из этих чисел не меньше 6,1. При этом каждое из этих чисел имеет вид $c = \frac{a}{b}$, где a — натуральное число и $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, поэтому максимальное из этих чисел не меньше $6\frac{1}{8}$.

Покажем, что максимальное из этих чисел не может равняться $6\frac{1}{8}$.

Пусть $c_1 = 6\frac{1}{8}$. Тогда первая группа состоит из 8 чисел, сумма которых равна $49 = 61 - 12$. Значит, каждая из других двух групп состоит из одного числа, причём сумма двух чисел из второй и третьей групп равна 12. Но тогда одно из этих чисел больше 6, поэтому максимальное среднее не меньше 7. Получаем, что максимальное из чисел c_1, c_2, c_3 не меньше $6\frac{1}{7}$.

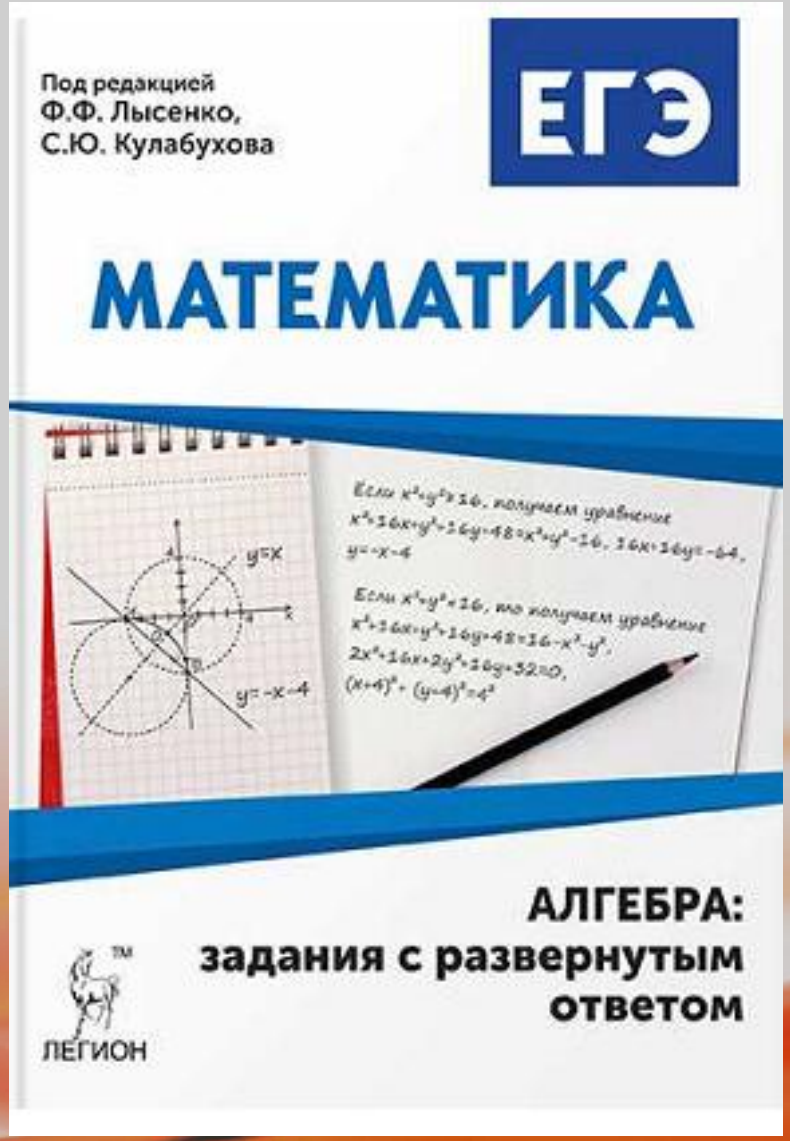
Покажем, что максимальное из чисел c_1, c_2, c_3 может равняться $6\frac{1}{7}$. Это так для групп $\{6\}$, $\{4, 8\}$, $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 16\}$: $c_1 = c_2 = 6$, $c_3 = 6\frac{1}{7}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$.

Задание 19

Содержание критерия, задача №3	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Книга для подготовки



БЕСПЛАТНЫЕ ВЕБИНАРЫ

для учителей и обучающихся

на сайте www.legionr.ru

legionrus@legionrus.com

Вступайте в группу

«Издательство «Легион»

в социальных сетях:

В Контакте

facebook

Видео вебинаров смотрите на YouTube.

Адрес для корреспонденции:
344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550

Приобрести пособия
можно в интернет-магазине издательства
www.legionr.ru,

а также в книжных магазинах вашего города.

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!