

«Подготовка к ЕГЭ 2017. Производная и непрерывность при решении задания 12 ЕГЭ (профильный уровень)»

Обобщение и закрепление знаний и умений на заключительном этапе подготовки к ЕГЭ (классификация заданий, методика решений)

Нормативные документы

Обобщенный план варианта КИМ ЕГЭ 2017 года по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подг.	Коды проверяемых элементов содержания	Уровень сложности	Макс. балл
12	Уметь выполнять действия с функциями	3.2, 3.3	4.1, 4.2	Пов.	1

Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников

Код раздела	Код контролируемого требования (умения)	Требования (умения), проверяемые заданиями экзаменационной работы
3		Уметь выполнять действия с функциями
	3.2	Вычислять производные и первообразные элементарных функций
	3.3	Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, Находить наибольшее и наименьшее значение функции

Кодификатор элементов содержания по МАТЕМАТИКЕ

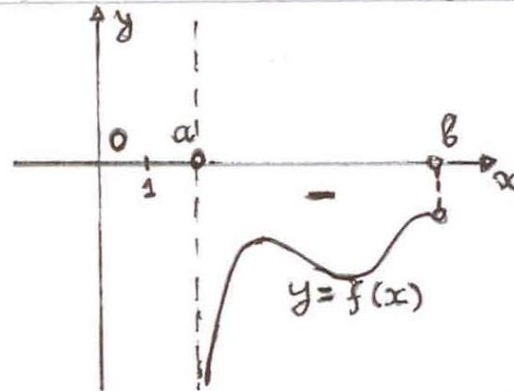
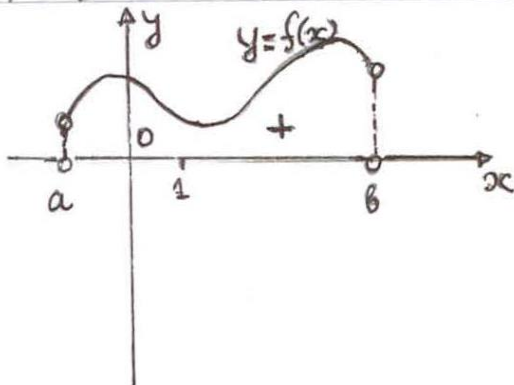
Код разде- ла	Код контролиру- емого элемента	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы
4		Начала математического анализа
4.1		<i>Производная</i>
	4.1.1	Понятие о производной функции, геометрический смысл производной
	4.1.2	Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком
	4.1.3	Уравнение касательной к графику функции
	4.1.4	Производная суммы, разности, произведения, частного
	4.1.5	Производные основных элементарных функций
	4.1.6	Вторая производная и её физический смысл
4.2		<i>Исследование Функций</i>
	4.2.1	Применение производной к исследованию функций и построению графиков
	4.2.2	Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения, в том числе социально-экономических задачах

Анализ заданий открытого банка (начало):

- 1. Задачи на нахождение точек максимума или минимума;**
- 2. Задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значений функции.**

Основополагающие факты

I. Если функция $y = f(x)$ **непрерывна** на интервале $(a; b)$ и не обращается в ноль ни в одной точке этого интервала, то либо $f(x) > 0$ для любого $x \in (a; b)$ (имеет знак «+»), либо $f(x) < 0$ для любого $x \in (a; b)$ (имеет знак «-»).



II. Пусть функция $y = f(x)$ **дифференцируема** на интервале $(a; b)$.

Если производная $f'(x) > 0$ (имеет знак «+») для любого $x \in (a; b)$, то функция $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$ **возрастает**.

Если же производная $f'(x) < 0$ (имеет знак «-») для любого $x \in (a; b)$, то функция $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$ **убывает**.

Схема исследования функции на монотонность

Отметим, что исследование на монотонность (возрастание или убывание) большинства функций, приведённых в открытом банке заданий, сводится к исследованию их на некотором интервале $(a; b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$ или $a, b = \pm\infty$). Причём, на этом интервале функции **дифференцируемы** и их производные **непрерывны**.

1. Находим производную y' функции $y = f(x)$.
2. Решаем уравнение $y' = 0$. Все его корни $x_1, x_2, \dots, x_k$, ($x_1 < x_2 < \dots < x_k$), принадлежащие интервалу $(a; b)$, делят множество оставшихся его точек на $(k + 1)$ интервалов:

$$(a; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_{k-1}; x_k), (x_k; b).$$

3. На каждом из этих интервалов **производная y' не обращается в ноль и непрерывна**. Тогда, согласно свойствам I и II, на каждом из них производная y' сохраняет знак. А значит, функция $y = f(x)$ либо возрастает либо убывает.

(*) Для определения знака производной на любом из указанных интервалов достаточно найти знак производной всего в одной точке. Её выбирают так, чтобы знак производной находился без труда.

Пример (образец) исследования функции на монотонность

Задача. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = 5\sqrt{x} - 12\ln(x - 1) + 7.$$

Решение. Областью определения этой функции является интервал $(1; +\infty)$, на котором функция дифференцируема.

1. Находим y' по правилам дифференцирования и* формулам производных степенной и логарифмической функций.

$$y' = \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{12}{x-1} = \frac{5(x-1) - 24\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-1)} = \frac{5x - 5 - 24\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-1)}.$$

2. Решаем уравнение $y' = 0$, $5x - 5 - 24\sqrt{x} = 0$.

Сделаем замену $\sqrt{x} = t$ ($t > 1$). Получим уравнение $5t^2 - 24t - 5 = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 25}}{5} = \frac{12 \pm 13}{5}, t_1 = -\frac{1}{5}, t_2 = 5.$$

Так как $t > 1$, то $\sqrt{x} = 5$, $x = 25$.

3. Получили единственную стационарную точку $x = 25$, принадлежащую интервалу $(1; +\infty)$, которая разбивает этот интервал на два интервала: $(1; 25)$, $(25; +\infty)$.

Так как $x > 1$, то знак производной совпадает со знаком функции $y_1 = 5x - 5 - 24\sqrt{x}$. Для определения её знака на интервалах $(1; 25)$ и $(25; +\infty)$ находим $y_1(4)$ и $y_1(36)$: $y_1(4) = -33 < 0$; $y_1(36) = 31 > 0$.

$y' < 0$ на промежутке $(1; 25)$, поэтому функция на нём убывает ($\searrow$).
 $y' > 0$ на промежутке $(25; +\infty)$, поэтому функция на нём возрастает ($\nearrow$).

Анализ заданий открытого банка (продолжение):

- 1. Большое число однотипных задач;**
- 2. Очень большой общий объём задач (более 8000).**

Классификация заданий открытого банка на нахождение точек $\max$ и $\min$

1) Одна стационарная точка x_0

	$(a; x_0)$	x_0	$(x_0; b)$
Знак y'	+		-
Повед. y	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$

	$(a; x_0)$	x_0	$(x_0; b)$
Знак y'	-		+
Повед. y	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$

2) Две стационарные точки x_1 и x_2 , $x_1 < x_2$

	$(a; x_1)$	x_1	$(x_1; x_2)$	x_2	$(x_2; b)$
Знак y'	+		-		+
Повед. y	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$

	$(a; x_1)$	x_1	$(x_1; x_2)$	x_2	$(x_2; b)$
Знак y'	-		+		-
Повед. y	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$



Пример № 1 на нахождение точек *max* и *min* (одна стац. точка)

Найдите точку максимума функции $y = -6x^{\frac{3}{2}} + 36x^{\frac{1}{2}} - 11$.

Решение. Областью определения функции является промежуток $[0; +\infty)$, на котором она дифференцируема. Найдём стационарные точки на интервале $(0; +\infty)$.

1. Находим y' по правилам дифференцирования и формуле производной степенной функции.

$$y' = -6 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} + 36 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -9\sqrt{x} + \frac{18}{\sqrt{x}} = \frac{-9x + 18}{\sqrt{x}},$$

$$y' = \frac{-9x + 18}{\sqrt{x}}.$$

2. Решая уравнение $y' = 0$, получаем $x = 2$.

3. Получаем единственную стационарную точку, принадлежащую интервалу $(0; +\infty)$, которая разбивает этот интервал на два интервала: $(0; 2)$, $(2; +\infty)$..

Так как $\sqrt{x} > 0$, то знак производной совпадает со знаком функции $y_1 = -9x + 18$. Для определения её знака на интервалах $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$ находим $y_1(1)$ и $y_1(4)$: $y_1(1) = 9 > 0$; $y_1(4) = -18 < 0$.

$y' > 0$ на промежутке $(0; 2)$, поэтому функция на нём возрастает ($\nearrow$).
 $y' < 0$ на промежутке $(2; +\infty)$, поэтому функция на нём убывает ($\searrow$). Поэтому точка $x = 2$ будет точкой максимума.

Ответ. 2.

Пример № 2 на нахождение точек $\max$ и $\min$ (две стац. точки)

Найдите точку минимума функции $y = \frac{25x^2 + 25}{x}$.

Решение. Областью определения функции является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, в каждой точке которого функция дифференцируема.

1. Находим y' , представив заданную функцию в виде $y = 25x + \frac{25}{x}$.

По правилам дифференцирования и по формуле производной степенной функции получаем:

$$y' = 25 - \frac{25}{x^2} = \frac{25x^2 - 25}{x^2} = \frac{25(x^2 - 1)}{x^2}, \quad y' = \frac{25(x^2 - 1)}{x^2}.$$

2. Решаем уравнение $y' = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

3. Получаем две стационарные точки, принадлежащие области определения, которые разбивают область определения на 4 интервала: $(-\infty; -1)$; $(-1; 0)$; $(0; 1)$; $(1; +\infty)$.

Так как $x^2 > 0$ в области определения, то знак производной совпадает со знаком функции $y_1 = x^2 - 1$. Для определения её знака на указанных интервалах находим $y_1(-2)$, $y_1(-0,5)$, $y_1(0,5)$ и $y_1(2)$:

$y_1(-2) = 3 > 0$, $y_1(-0,5) = -0,75 < 0$, $y_1(0,5) = -0,75 < 0$ и $y_1(2) = 3 > 0$.

$y' > 0$ на промежутке $(-\infty; -1)$, поэтому функция на нём возрастает ($\nearrow$). $y' < 0$ на промежутке $(-1; 0)$, поэтому функция на нём убывает ($\searrow$). $y' < 0$ на промежутке $(0; 1)$, поэтому функция на нём убывает ($\searrow$). $y' < 0$ на промежутке $(-1; +\infty)$, поэтому функция на нём возрастает ($\nearrow$).

Отсюда следует, что точка $x = 1$ будет точкой минимума.

Ответ. 1.

Замечание к предыдущему слайду

$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
						

Классификация заданий открытого банка на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции

1) Нет стационарных точек

	a	$(a; b)$	b
Знак y'		$+$	$.$
Повед. y	$f(a)$ — наим	$\nearrow$	$f(b)$ — наиб

	a	$(a; b)$	b
Знак y'		$-$	
Повед. y	$f(a)$ — наиб	$\searrow$	$f(b)$ — наим

2) Одна стационарная точка x_0

	a	$(a; x_0)$	x_0	$(x_0; b)$	b
Знак y'		$+$	0	$-$	
Повед. y		$\nearrow$	$f(x_0)$ — наиб	$\searrow$	

	a	$(a; x_0)$	x_0	$(x_0; b)$	b
Знак y'		$-$	0	$+$	
Повед. y		$\searrow$	$f(x_0)$ — наим	$\nearrow$	

Классификация заданий открытого банка на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции

3) Две стационарные точки x_1 и x_2 , $x_1 < x_2$

	a	$(a; x_1)$	x_1	$(x_1; x_2)$	x_2	$(x_2; b)$	b
Знак y'		+	0	-	0	+	
Повед. y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(a)$ или $f(x_2)$ – наим. $f(x_1)$ или $f(b)$ – наиб

	a	$(a; x_1)$	x_1	$(x_1; x_2)$	x_2	$(x_2; b)$	b
Знак y'		-	0	+	0	-	
Повед. y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(x_1)$ или $f(b)$ – наим. $f(a)$ или $f(x_2)$ – наиб

Пример № 1 на нахождение наибольшего или наименьшего значений (нет стационарных точек)

Найдите наименьшее значение функции $y = -4x - 4 \cos x + 5$ на отрезке $[-\pi; 0]$.

Решение. Заданная функция дифференцируема на всей числовой прямой.

1. Находим y' , пользуясь правилами дифференцирования и формулой производной функции $y = \cos x$:

$$y' = -4 + 4 \sin x = -4(1 - \sin x), \quad y' = -4(1 - \sin x).$$

2. Решаем уравнение $y' = 0$, $1 - \sin x = 0$, $\sin x = 1$,
 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. Ни один корень уравнения не принадлежит интервалу $(-\pi; 0)$, значит на нём стационарных точек нет. Для нахождения знака производной найдем её значение в точке $x = -\frac{\pi}{6}$, $y'(-\frac{\pi}{6}) = -6 < 0$.

Следовательно, на интервале $(-\pi; 0)$ заданная функция убывает ($\searrow$). Наименьшее значение функции будет на правом конце промежутка в точке $x = 0$.

$$y(0) = -4 \cdot 0 - 4 \cos 0 + 5 = -4 + 5 = 1$$

Ответ. 1.

Пример № 2 на нахождение наибольшего или наименьшего значений (единственная стационарная точка)

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 7)^3 - 3x$ на отрезке $[-6,5; -4]$.

Решение. Областью определения функции является промежуток $(-7; +\infty)$, на котором она дифференцируема. Отрезок $[-6,5; -4]$ принадлежит области определения.

По свойству логарифмов, в области определения функции выполняется равенство $\ln(x + 7)^3 = 3\ln(x + 7)$, поэтому $y = 3\ln(x + 7) - 3x$.

1. Находим y' , пользуясь правилами дифференцирования и формулой производной логарифмической функции:

$$y' = \frac{3}{x + 7} - 3 = \frac{3 - 3x - 21}{x + 7} = \frac{-3x - 18}{x + 7}.$$

2. $y' = 0$ при $x = -6$.

3. Получаем единственную стационарную точку, которая принадлежит интервалу $(-6,5; -4)$. Эта точка разбивает его на два интервала: $(-6,5; -6)$; $(-6; -4)$. Знак производной в области определения совпадает со знаком функции $y_1 = -3x - 18$. Находим значения производной в точках $x = -6,1$ и $x = -5$. $y_1(-6,1) = 0,3 > 0$, $y_1(-5) = -3 < 0$.

$y' > 0$ на интервале $(-6,5; -6)$, поэтому на нём функция возрастает ($\nearrow$). $y' < 0$ на интервале $(-6; -4)$, поэтому на нём функция убывает ($\searrow$). Следовательно, в точке $x = -6$ функция достигает наибольшего значения.

$$y(-6) = 3\ln(-6 + 7) - 3 \cdot (-6) = 18, \text{ так как } \ln 1 = 0.$$

Ответ. 18.

Пример № 3 на нахождение наибольшего или наименьшего значений (две стационарные точки)

Найдите наибольшее значение функции $y = 2x - \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Решение. Заданная функция дифференцируема на интервале $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.

1. Находим производную y' , пользуясь правилами дифференцирования и формулой производной тангенса:

$$y' = 2 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos^2 x}.$$

2. Решаем уравнение $y' = 0$, $2 \cos^2 x - 1 = 0$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}), x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2t\pi (t \in \mathbb{Z}).$$

3. Из полученных корней только два $x = \pm \frac{\pi}{4}$ принадлежат интервалу $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$. Эти точки разбивают его на три интервала: $\left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$. Знак производной в области определения совпадает со знаком функции $y_1 = 2 \cos^2 x - 1$.

На интервале $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$ нет удобных точек для нахождения $\cos x$.

Окончание примера № 3 на нахождение наибольшего или наименьшего значения (две стационарные точки)

Поэтому рассуждаем так. Если $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$, то $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$. Тогда $\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{4} < \cos^2 x < \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < 2 \cos^2 x - 1 < 0$.

$y_1 < 0$ на интервале $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$, поэтому на нём функция убывает ($\searrow$).

Так как $\cos x = \cos(-x)$, что $y_1 < 0$ и на интервале $\left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right)$, поэтому на нём функция также убывает ($\searrow$).

Знак функции y_1 на интервале $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ совпадает со знаком числа $y_1(0) = 1 > 0$. Значит, на нём функция возрастает ($\nearrow$). Следовательно, наибольшее значение равно либо $y\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, либо $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$-\frac{\pi}{3}$	$\left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$
	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-2\pi}{3} - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{2} = \sqrt{3} - \frac{7\pi}{6}.$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{4} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2} = -1.$$

$-1 - \left(\sqrt{3} - \frac{7\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6} - (1 + \sqrt{3}) > 0$, поэтому -1 — наибольшее значение функции.

Ответ. -1 .

Свойства монотонности сложных функций

1. Если функция $y_1 = f(x)$ на множестве A **возрастает** и функция $y_2 = g(x)$ на множестве $f(A)$ **возрастает**, то сложная функция $y = g(f(x))$ **возрастает** на множестве A :

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \rightarrow y(x_1) < y(x_2).$$

2. Если функция $y_1 = f(x)$ на множестве A **убывает** и функция $y_2 = g(x)$ на множестве $f(A)$ **убывает**, то сложная функция $y = g(f(x))$ **возрастает** на множестве A :

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \rightarrow y(x_1) < y(x_2).$$

3. Если функция $y_1 = f(x)$ на множестве A **убывает**, а функция $y_2 = g(x)$ на множестве $f(A)$ **возрастает**, то сложная функция $y = g(f(x))$ **убывает** на множестве A :

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \rightarrow y(x_1) > y(x_2).$$

4. Если функция $y_1 = f(x)$ на множестве A **возрастает**, а функция $y_2 = g(x)$ на множестве $f(A)$ **убывает**, то сложная функция $y = g(f(x))$ **убывает** на множестве A :

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \rightarrow y(x_1) > y(x_2).$$

Использование свойств монотонности сложной функции при исследовании некоторых функций

Найдите наименьшее значение функции

$y = \sqrt{x^2 - 4x + 7}$ на отрезке $[0; 1]$.

Решение. 1. Отметим, что заданная функция является сложной функцией $y = g(f(x))$, где $f(x) = x^2 - 4x + 7$, а $g(x) = \sqrt{x}$.

2. Функция $f(x) = x^2 - 4x + 7$ на промежутке $[0; 1]$ является убывающей, так как её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх, а абсцисса вершины равна 2.

Так как дискриминант D квадратного трёхчлена $x^2 - 4x + 7$ меньше нуля, то все значения функции $f(x)$ положительны и заданная функция определена при любом значении x .

3. Функция $g(x) = \sqrt{x}$ является возрастающей. Значит, сложная функция $y = g(f(x))$ получается из двух функций, одна из которых убывающая, а другая возрастающая. Поэтому заданная функция является убывающей.

4. Убывающая на отрезке $[0; 1]$ функция принимает наименьшее значение на правом конце отрезка в точке $x = 1$.

$$y(1) = \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 + 7} = \sqrt{4} = 2$$

Ответ. 2.



Использование свойств монотонности сложной функции при исследовании некоторых функций

Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 3)$ на отрезке $[-2; 0]$.

Решение. 1. Отметим, что заданная функция является сложной функцией $y = g(f(x))$, где $f(x) = x^2 - 4x + 3$, а $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

2. Функция $f(x) = x^2 - 4x + 3$ на промежутке $[-2; 0]$ является убывающей, так как её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх, а абсцисса вершины равна 2. Так как $f(0) = 3$, то при всех значениях x из промежутка $[-2; 0]$ значения функции $f(x)$ положительны и заданная функция определена.

3. Функция $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ является убывающей, так как она является

логарифмической функцией с основанием, меньшим 1. Значит, сложная функция $y = g(f(x))$ получается из двух убывающих функций, а потому является возрастающей.

4. Возрастающая на отрезке $[-2; 0]$ функция принимает наибольшее значение на правом конце отрезка в точке $x = 0$.

$$y(0) = \log_{\frac{1}{3}}(0^2 - 4 \cdot 0 + 3) = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$$

Ответ. -1 .

Сравнение двух способов исследования некоторых функций:
а) с использованием свойств монотонности сложной функции;
б) с помощью производной

а) Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 5x + 8)^7.$$

Решение. 1. Отметим, что заданная функция является сложной функцией $y = g(f(x))$, где $f(x) = x^2 - 4x + 7$, а $g(x) = x^7$.

2. Функция $f(x) = x^2 - 5x + 8$ является убывающей на промежутке $(-\infty; 2,5]$ и возрастающей на промежутке $[2,5; +\infty)$ так как её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх, а абсцисса вершины равна 2,5.

Так как обе функции $f(x)$ и $g(x)$ определены при любом значении x , то и заданная функция определена при любом значении x .

3. Функция $g(x) = x^7$ является возрастающей. Значит, сложная функция $y = g(f(x))$ на промежутке $(-\infty; 2,5]$ убывающая (она получается из убывающей и возрастающей функций на этом промежутке), а на промежутке $[2,5; +\infty)$ возрастающая (она получается из двух возрастающих функций на этом промежутке).

4. Следовательно, точка $x = 2,5$ является точкой минимума.

Ответ. 2,5.

Сравнение двух способов исследования некоторых функций:
а) с использованием свойств монотонности сложной функции;
б) с помощью производной

б) Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 5x + 8)^7$.

Решение. Заметим, что заданная функция определена и дифференцируема при любом значении x .

1. Находим y' , пользуясь правилами дифференцирования, формулами производной степенной и сложной функций:

$$y' = 7(x^2 - 5x + 8)^6 \cdot (x^2 - 5x + 8)' = 7(x^2 - 5x + 8)^6 \cdot (2x - 5).$$

2. Решаем уравнение $y' = 0$. Заметим, что $x^2 - 5x + 8 > 0$ для любого x , так как дискриминант квадратного трёхчлена меньше нуля и ветви его графика направлены вверх. Поэтому $2x - 5 = 0$, $x = 2,5$.

3. Получили одну стационарную точку. Она делит область определения на два интервала: $(-\infty; 2,5)$ и $(2,5; +\infty)$. Знак производной совпадает со знаком функции $y_1 = 2x - 5$.

$$y_1(0) = -5 < 0, \text{ а } y_1(3) = 1 > 0$$

Поэтому на промежутке $(-\infty; 2,5)$ производная меньше нуля и на нём заданная функция убывает. На промежутке $(2,5; +\infty)$ производная больше нуля и на нём заданная функция возрастает.

4. Следовательно, точка $x = 2,5$ является точкой минимума.

Ответ. 2,5.

Пример 1 определения знака производной с использованием графика линейной функции

Найдите точку максимума функции $y = (4x - 6) \cos x - 4 \sin x + 10$ на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$.

Решение. Заметим, что заданная функция дифференцируема на указанном интервале.

1. Находим y' , пользуясь формулой производной произведения двух функций, правилами дифференцирования, формулами производной степенной и тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} y' &= (4x - 6)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot (4x - 6) - (4 \sin x)' + 10', \\ y' &= 4 \cos x - (4x - 6) \sin x - 4 \cos x = (-4x + 6) \sin x, \\ y' &= (-4x + 6) \sin x. \end{aligned}$$

2. Решаем уравнение $y' = 0$. Так как $\sin x > 0$ на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$, то $-4x + 6 = 0$, $x = 1,5$.

3. Получили одну стационарную точку $x = 1,5$, которая принадлежит интервалу $(0; \frac{\pi}{2})$ ($1,5 < \frac{\pi}{2} \approx 1,57$). Она разбивает этот интервал на два интервала: $(0; 1,5)$; $(1,5; \frac{\pi}{2})$.

Знак производной совпадает со знаком функции $y_1 = -4x + 6$. Её графиком является прямая, наклонённая к оси абсцисс под тупым углом и пересекающая эту ось в точке $x = 1,5$ ($\searrow$). Поэтому она имеет знак «+» при $x < 1,5$ и знак «-» при $x > 1,5$. Следовательно, точка $x = 1,5$ является точкой максимума.

Ответ. 1,5.



Пример 2 определения знака производной с использованием графика квадратичной функции

Найдите наименьшее значение функции $y = (x+34)^2 e^{-34-x}$ на отрезке $[-34, 1; -33, 9]$.

Решение. Заметим, что заданная функция дифференцируема на указанном интервале.

1. Находим y' , пользуясь формулой производной произведения двух функций, правилами дифференцирования, формулами производной сложной, показательной и степенной функций:

$$y' = 2(x+34)e^{-34-x} - e^{-34-x}(x+34)^2 = e^{-34-x}(x+34)(-x-32),$$

$$y' = -e^{-34-x}(x+34)(x+32).$$

2. Решаем уравнение $y' = 0$. Так как $e^{-34-x} > 0$ при любом x , то $(x+34)(x+32) = 0$, $x_1 = -34$, $x_2 = -32$.

3. Получили две стационарные точки, но лишь одна из них $x_1 = -34$ принадлежит интервалу $(-34, 1; -33, 9)$. Она разбивает этот интервал на два интервала: $(-34, 1; -34)$; $(-34; -33, 9)$.

Знак производной совпадает со знаком функции $y_1 = -(x+34)(x+32)$. Её графиком является парабола, корнями которой являются числа $x_1 = -34$ и $x_2 = -32$, а её ветви направлены вниз. ($\searrow$). Поэтому она имеет знак «-» при $x < -34$ и знак «+» при $-34 < x < -33, 9$. Следовательно, в точке $x = -34$ функция достигает наименьшего значения.

$$y(-34) = (-34+34)^2 e^{-34+34} = 0$$

Ответ. 0.

Второй (нестандартный) способ решения

$(x + 34)^2 \geq 0$, $e^{-34-x} \geq 0$ для любого x , поэтому $y \geq 0$ для любого x . Но, $y(-34) = (-34 + 34)^2 e^{-34+34} = 0$. Значит наименьшим значением заданной функции является число 0.

Ответ. 0.



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Благодарим за внимание!
Желаем Вам творческих успехов, а
Всем выпускникам успешной сдачи
ЕГЭ

Ваш «ЛЕГИОН»

21. 03. 2017 г.