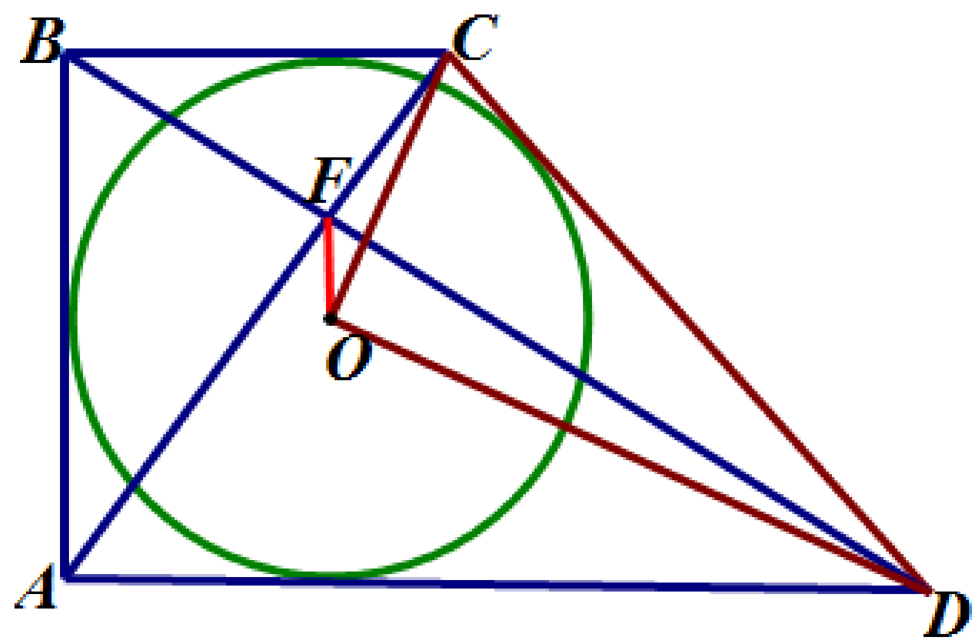
Издательство «Легион»

Задачи по геометрии с развёрнутым ответом на профильном ЕГЭ

Докладчик Елена Михайловна Фридман

Задача 1

В прямоугольную трапецию ABCD с большим основанием AD и прямыми углами A и B вписана окружность с центром в точке O.

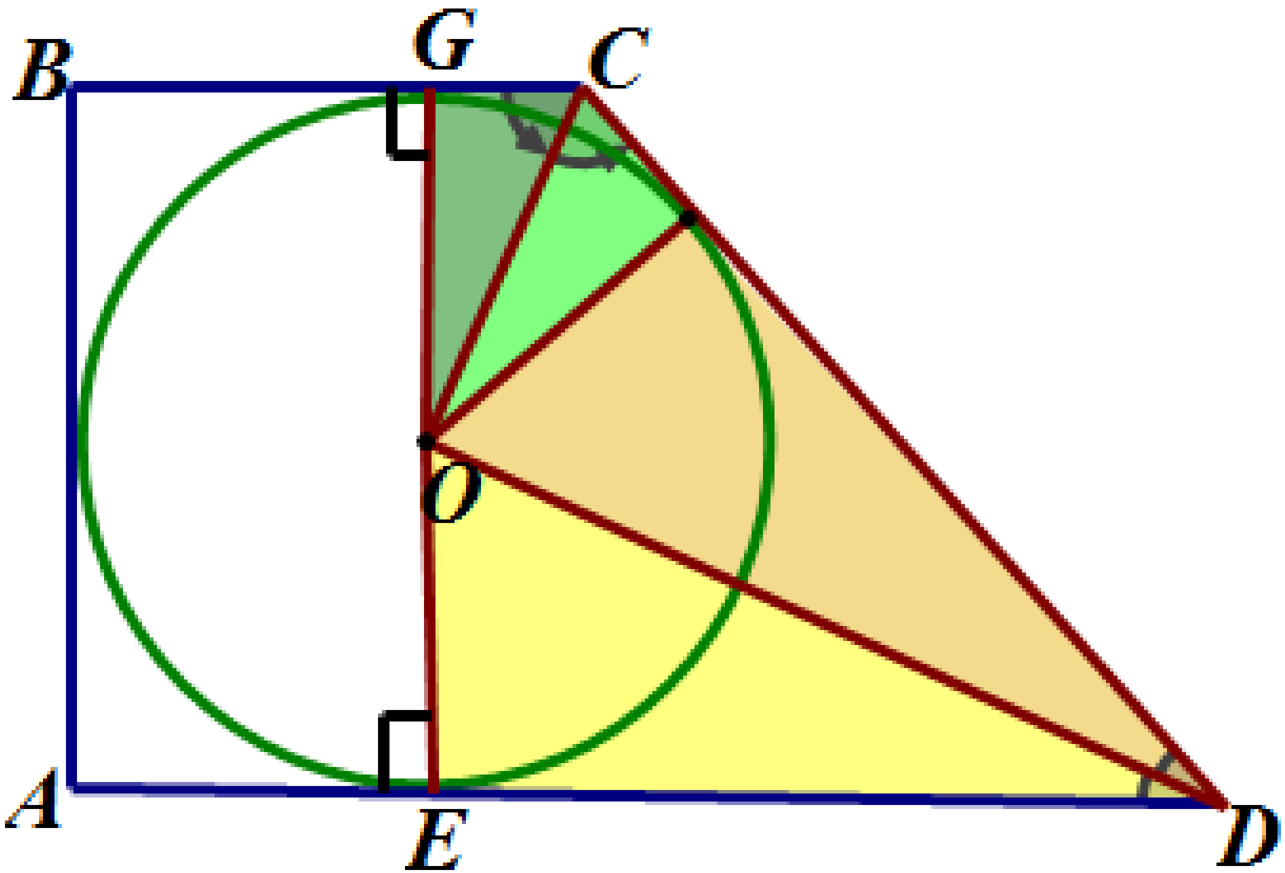


а) Докажите, что

$$CO^2 + OD^2 = CD^2.$$

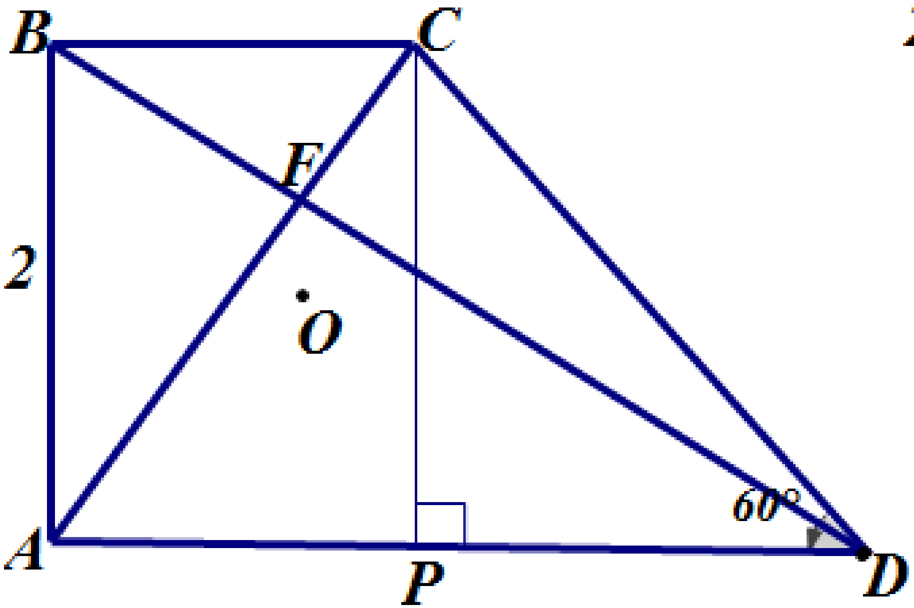
б) Найдите расстояние от точки O до точки пересечения диагоналей трапеции, если высота трапеции равна 2 и $\angle ADC = 60^0$.

а)



б)

$$AB+CD=BC+AD$$



$$2+\frac{4}{\sqrt{3}}=2BC+PD$$

$$2+\frac{4}{\sqrt{3}}=2BC+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

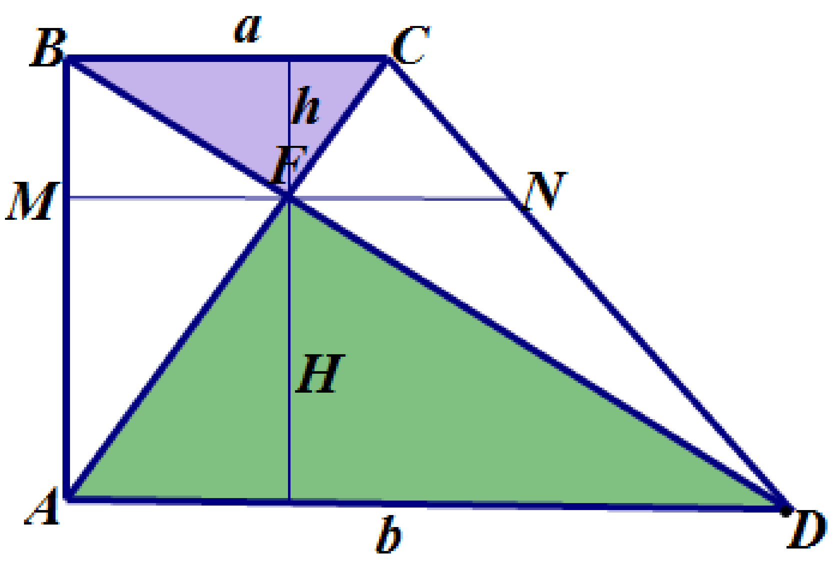
$$BC=1+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Рассмотрим ΔCDP:

$$AD=AP+PD=BC+PD=1+\frac{3}{\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$$

$$\frac{CP}{CD}=\cos 30°\qquad \frac{2}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$CD=\frac{4}{\sqrt{3}}\qquad PD=\frac{2}{\sqrt{3}}$$



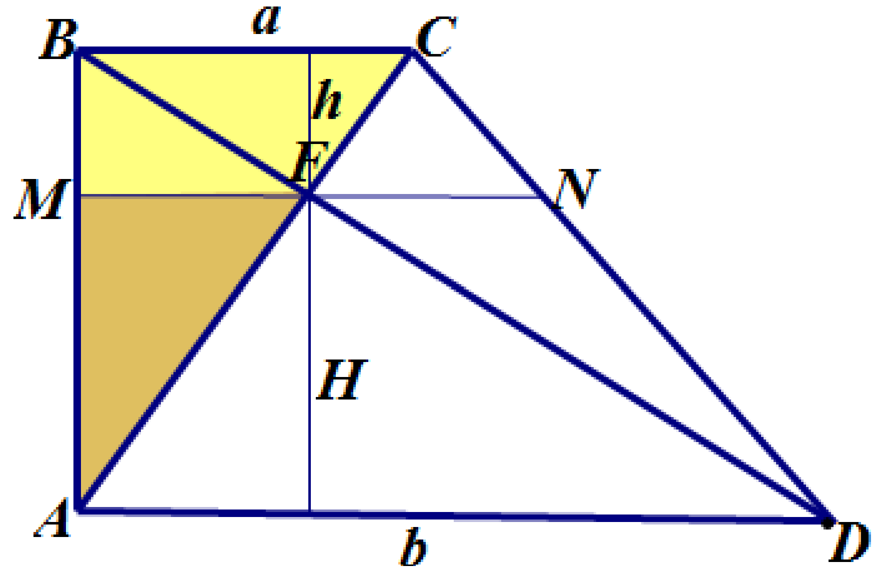
$$\Delta AFD \sim \Delta BFC$$

$$\frac{AF}{FC}=\frac{FD}{BF}=\frac{AD}{BC}=\frac{b}{a}=\frac{H}{h}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta AFM$$

$$\frac{BC}{FM}=\frac{AC}{AF}=\frac{AB}{AM}=\frac{H+h}{H}$$

$$\frac{H+h}{H}=\frac{1+\frac{h}{H}}{1}=1+\frac{a}{b}=\frac{b+a}{b}$$



$$\frac{BC}{FM}=\frac{b+a}{b} \qquad FM=\frac{ab}{b+a}$$

$$FM=\frac{ab}{b+a}$$

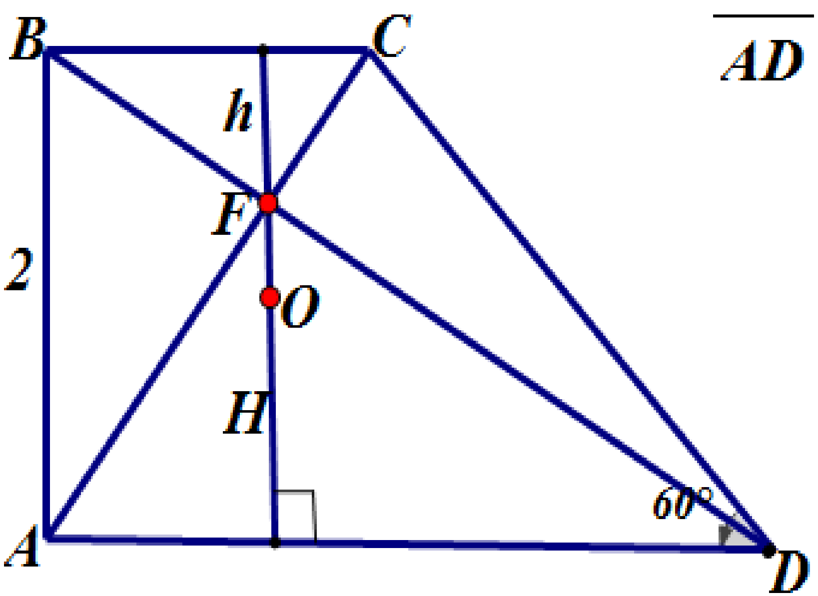
$$FM=\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{3}\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)}=1$$

$$BC=1+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$AD=1+\sqrt{3}$$

$$FO=H-R \qquad R=1$$

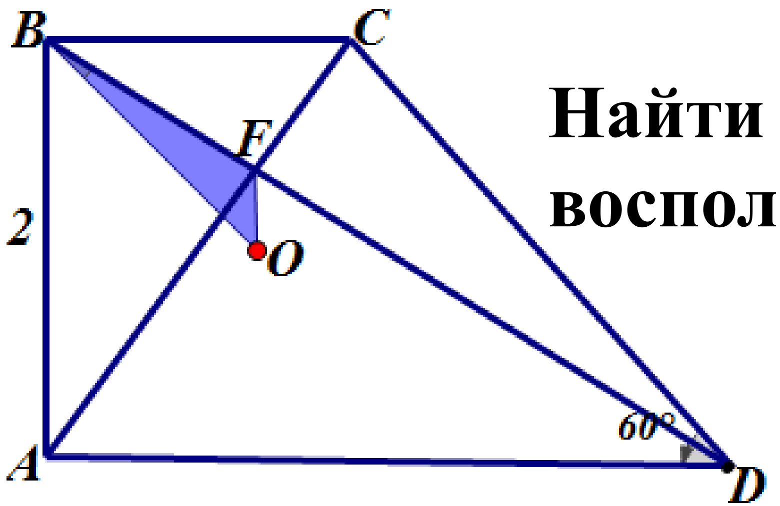
$$\frac{BC}{AD}=\frac{2-H}{H} \qquad H=\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$



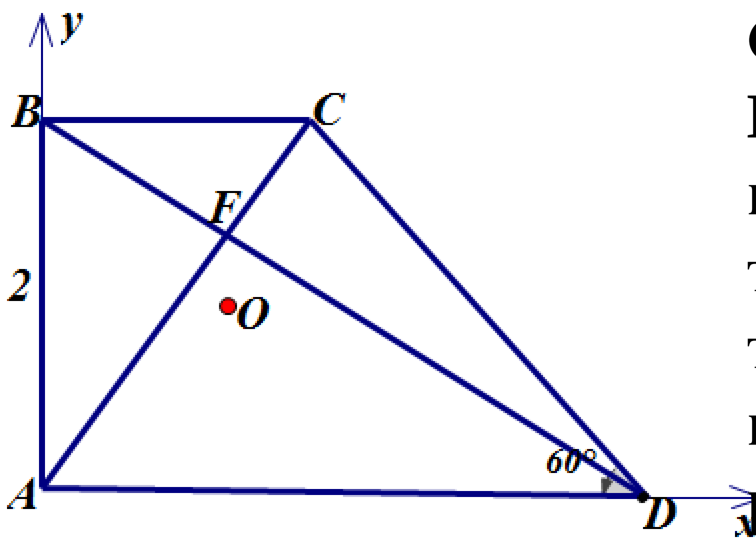
$$FO=H-1=\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}-1=2-\sqrt{3}$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

Идеи других способов



Найти BF, BO, cos ∠FBO и воспользоваться теоремой косинусов.



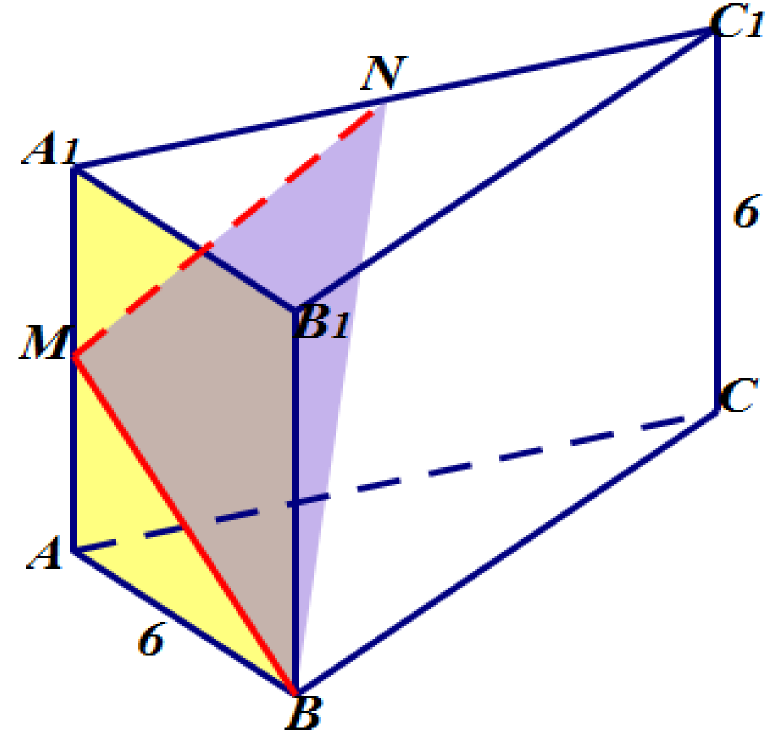
Составить уравнения прямых AC и BD, найти координаты их точки пересечения, убедиться в том, что точки O и F лежат на высоте трапеции, проходящей через центр вписанной окружности, а затем найти разность ординат точек F и O.

Задача 2

Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N – середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

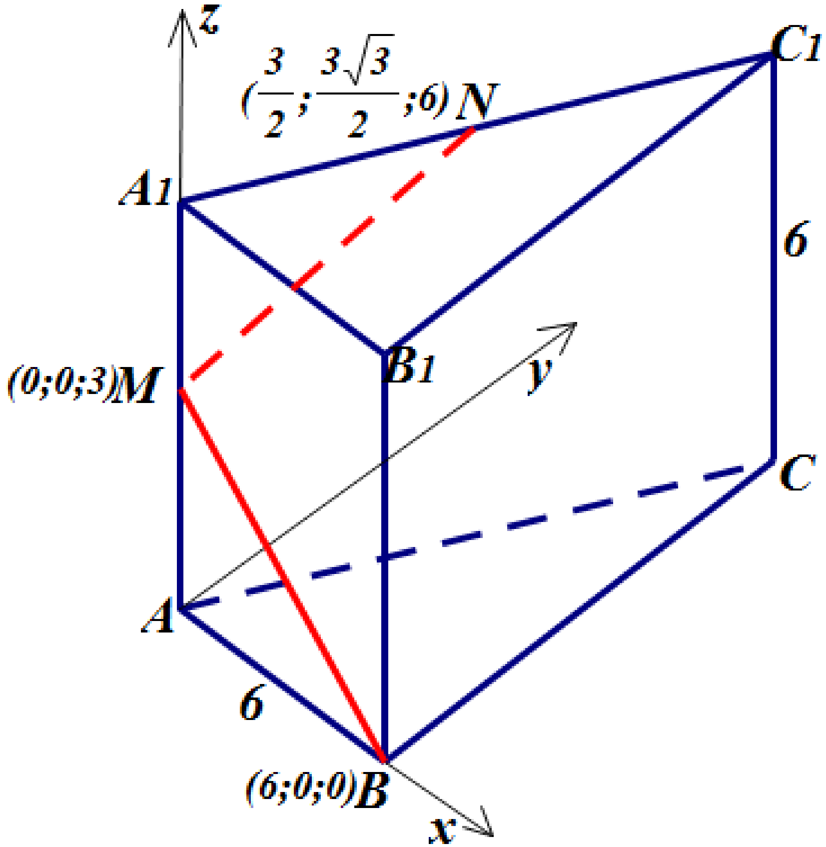
а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

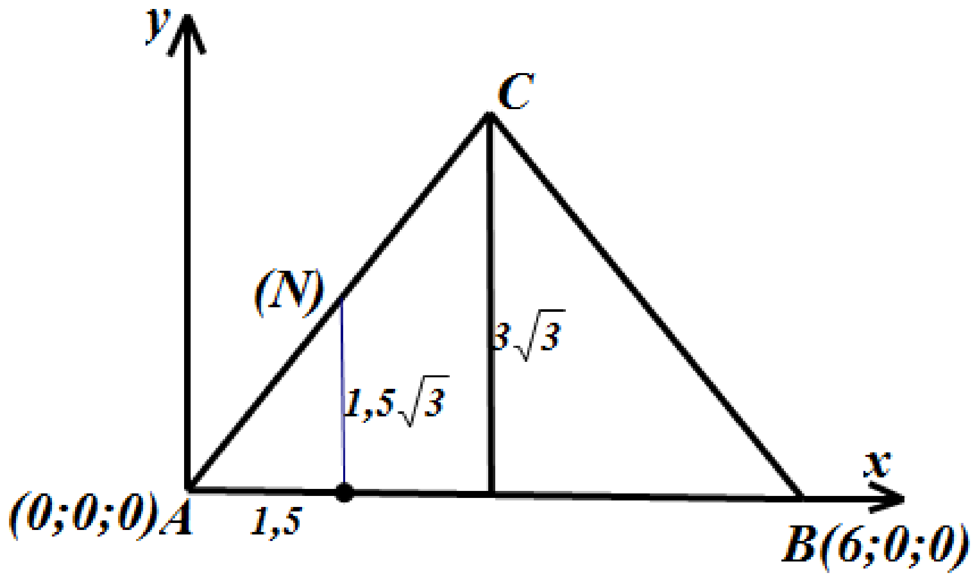
б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.



Решение. а)

Способ 1





$\overrightarrow{BM}\{-6;0;3\}$ $\overrightarrow{MN}\left\{\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2};3\right\}$

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{MN} = -6\cdot\frac{3}{2}+0\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}+3\cdot 3 = 0$$

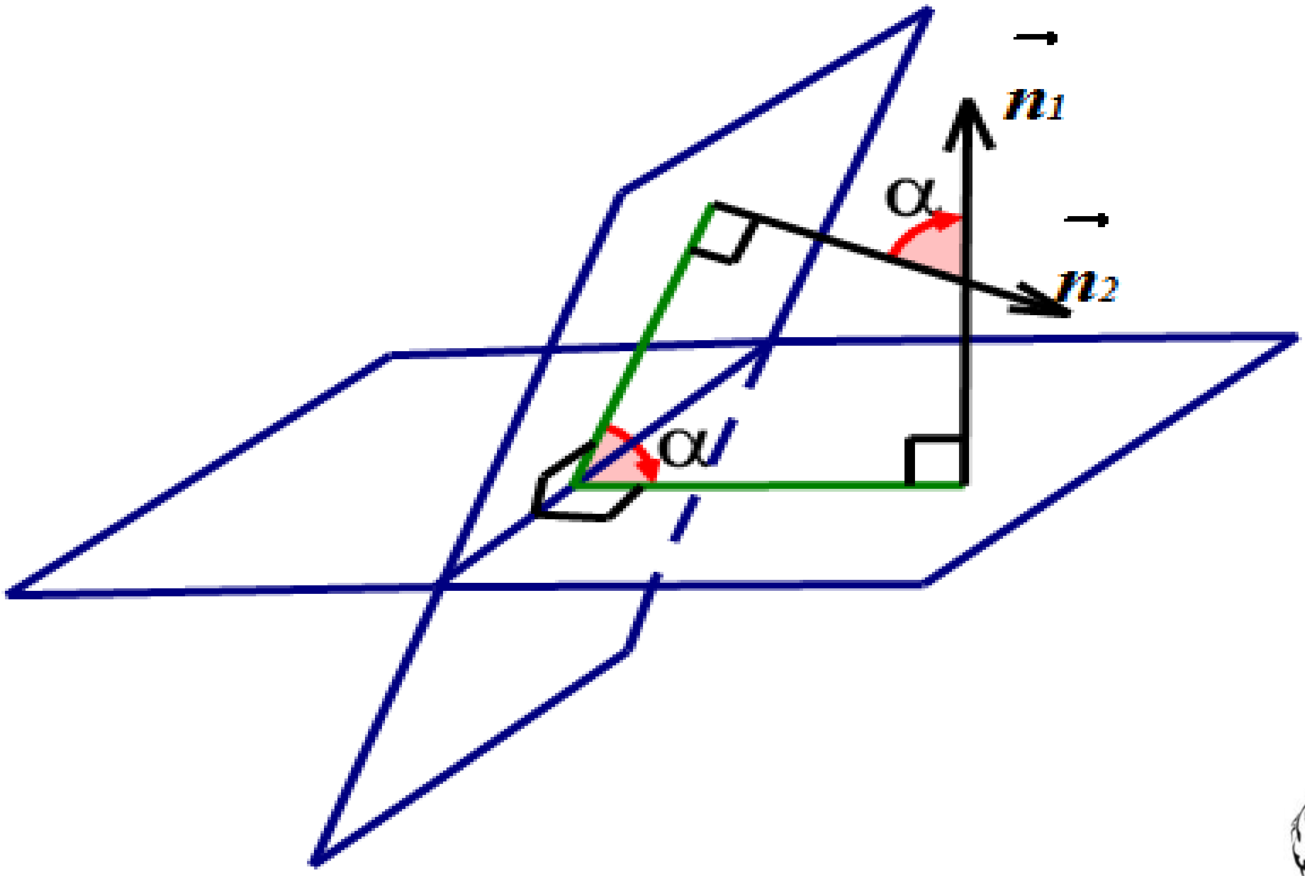
Способ 2

$MB = 3\sqrt{5}$ $MN = 3\sqrt{2}$ $BN = 3\sqrt{7}$

$$MN^2 + MB^2 = BN^2 \Rightarrow BM \perp MN$$

Угол между плоскостями

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{n_1 \cdot n_2}$$

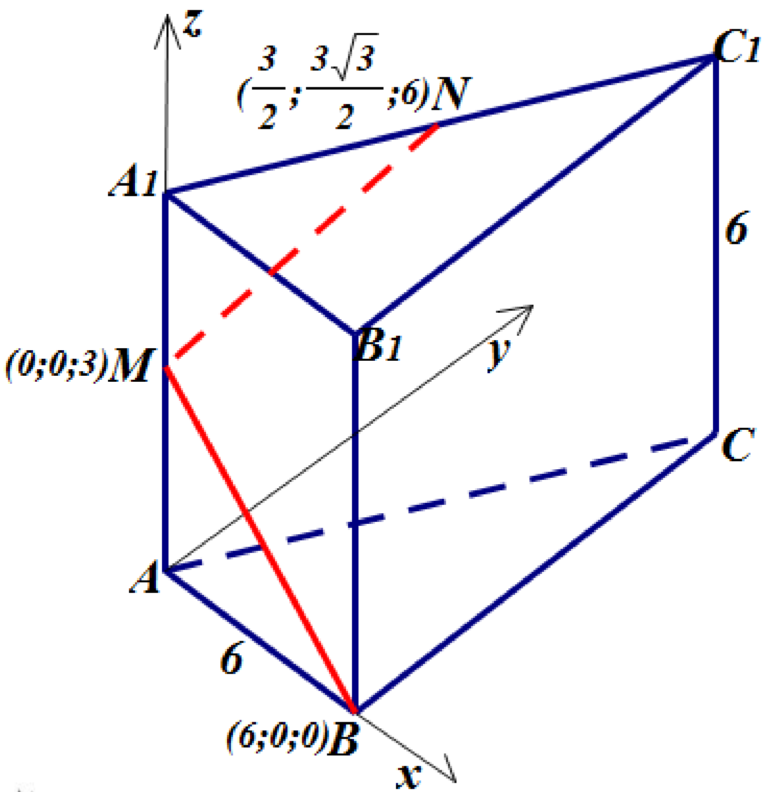


б) **Уравнение плоскости ABB_1 $y=0$, $\vec{n_1}\{0;1;0\}$**

$\vec{n_2}\{x;y;z\}$

$$\begin{cases} \vec{n_2}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\\ \vec{n_2}\cdot\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$$

$\overrightarrow{BM}\{-6;0;3\}$ $\overrightarrow{MN}\left\{\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2};3\right\}$



$$\begin{cases} x\cdot(-6)+y\cdot 0+z\cdot 3=0,\\ x\cdot\frac{3}{2}+y\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}+z\cdot 3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} z=2x,\\ x+\sqrt{3}y+2z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} z=2x,\\ y=-\frac{5x}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

$$\overrightarrow{n_2}\left\{1;-\frac{5}{\sqrt{3}};2\right\}$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

$$\overrightarrow{n_1}\{0;1;0\} \qquad \overrightarrow{n_2}\left\{1;-\frac{5}{\sqrt{3}};2\right\}$$

$$\cos\alpha=\frac{\left|0\cdot 1+1\cdot\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)+0\cdot 2\right|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2+2^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

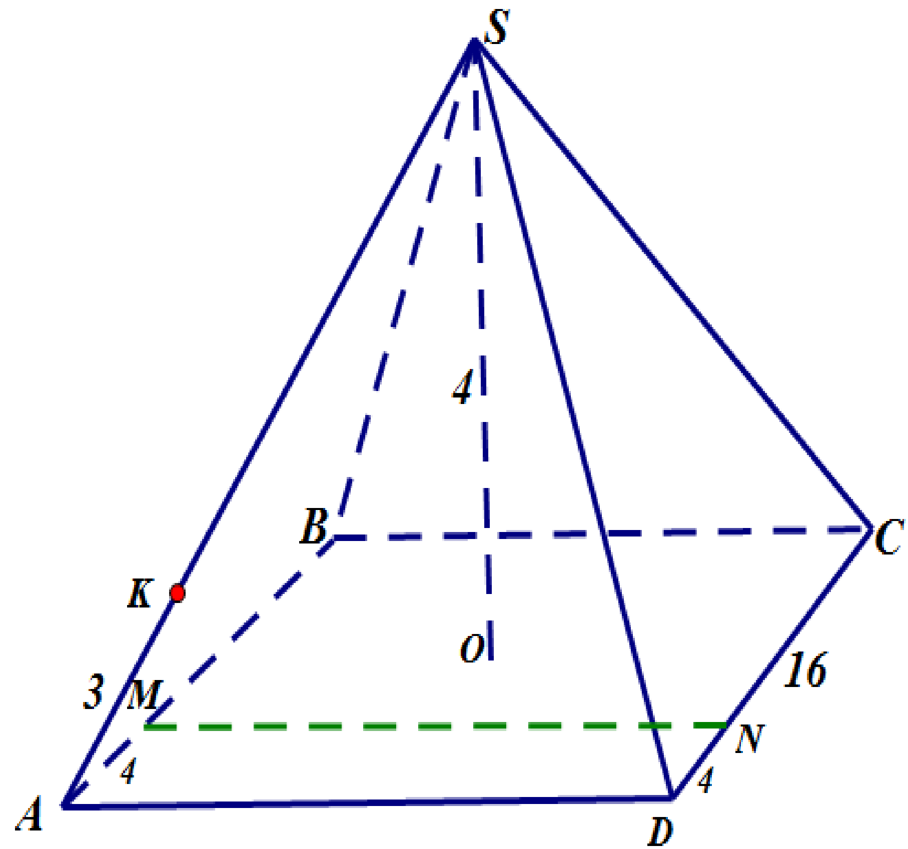
$$\alpha=\arccos\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

Задача 3

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD сторона AB=16, а высота равна 4. На ребрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причем AM=DN=4 и AK=3.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC



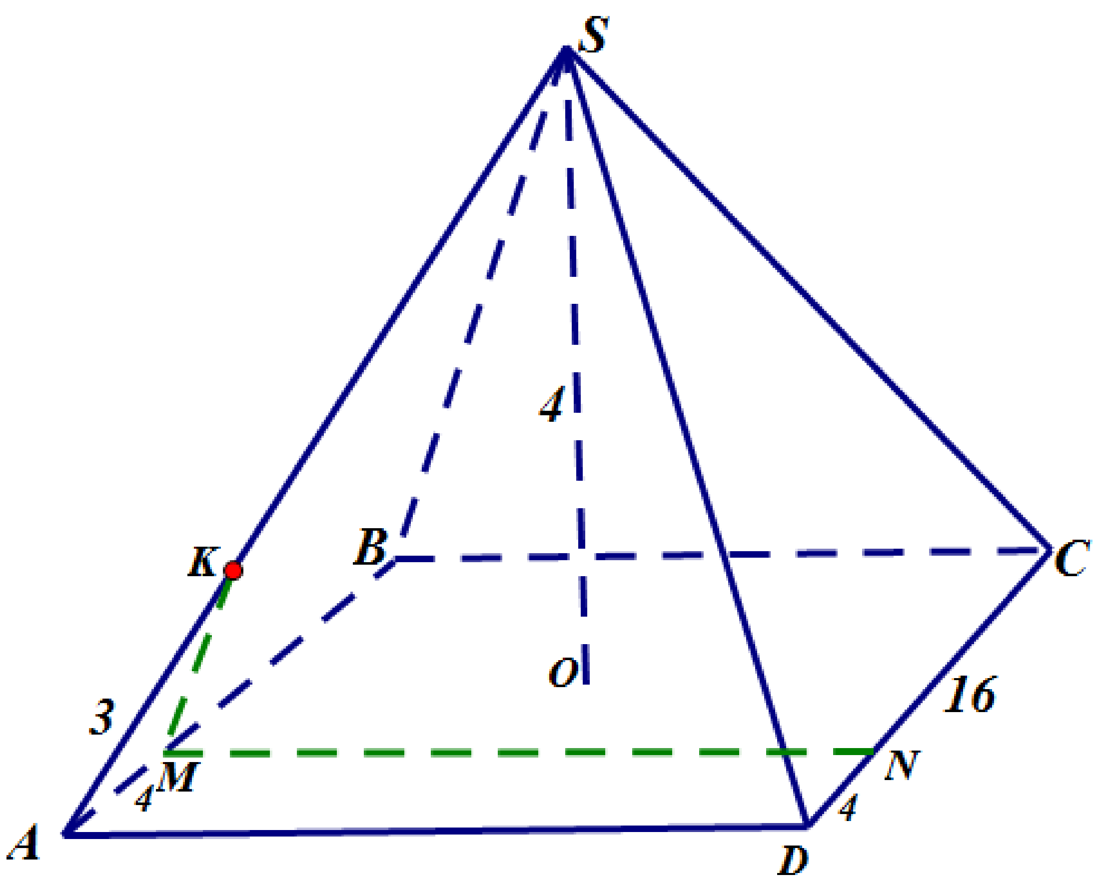
Решение.

а) $\Delta AKM \sim \Delta ABS$(по 2-му признаку):

$AK : AS = 3:12 = 1:4$, $AM:AB = 4:16 = 1:4$

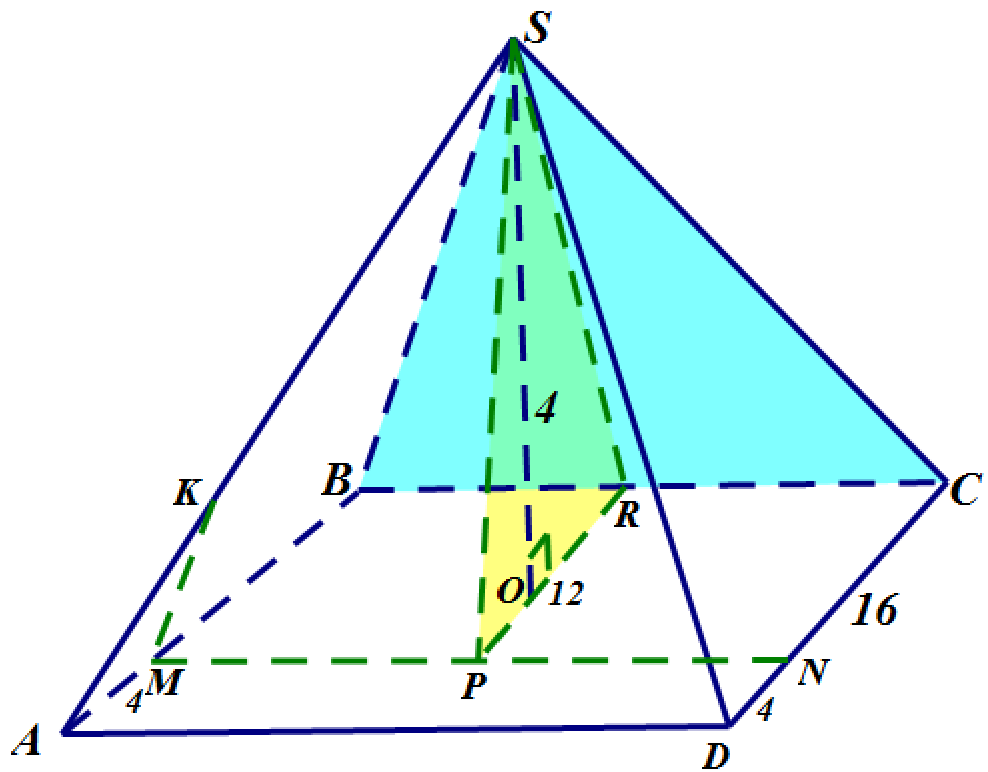
$\angle A$ – общий.

$KM \parallel BS, MN \parallel BC \Rightarrow KMN \parallel SBC$.



б) ρ(M,BSC)=ρ(P,BSC) (MN||BSC)

BC⊥SPR ⇒SPR ⊥SBC и SR – их линия пересечения.



Проведем PH ⊥SR ⇒ PH ⊥SBC

ρ(M,BSC)=PH

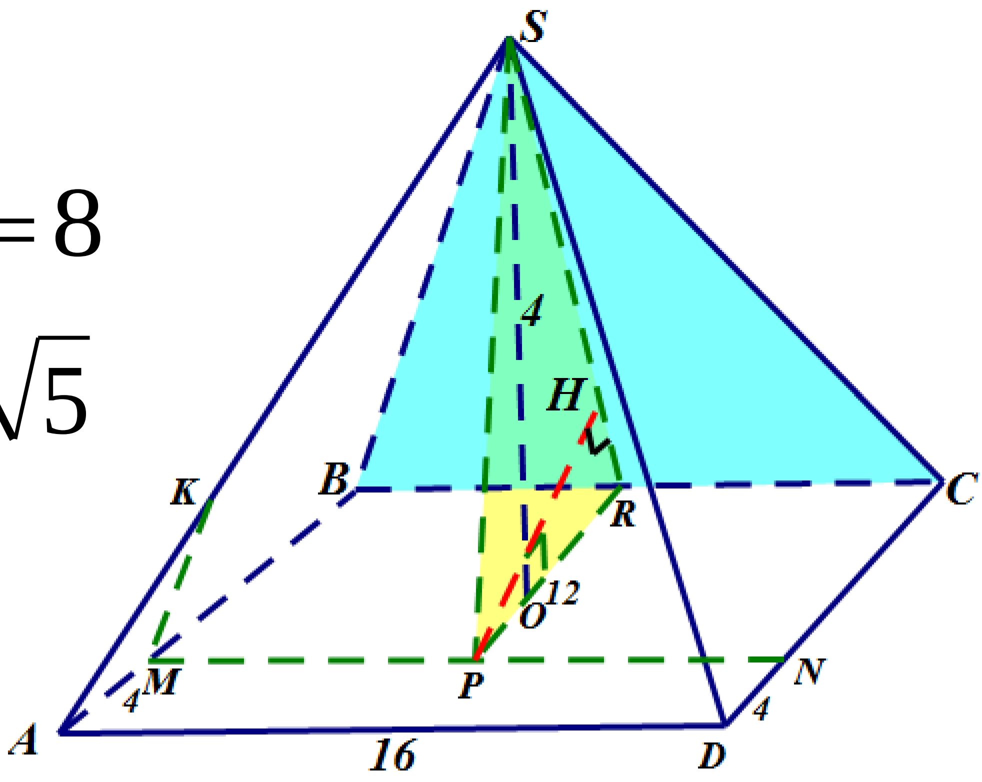
$$SR \cdot PH = SO \cdot PR$$

$$SO = 4, PR = 12, OR = 8$$

$$SR = \sqrt{SO^2 + OR^2} = 4\sqrt{5}$$

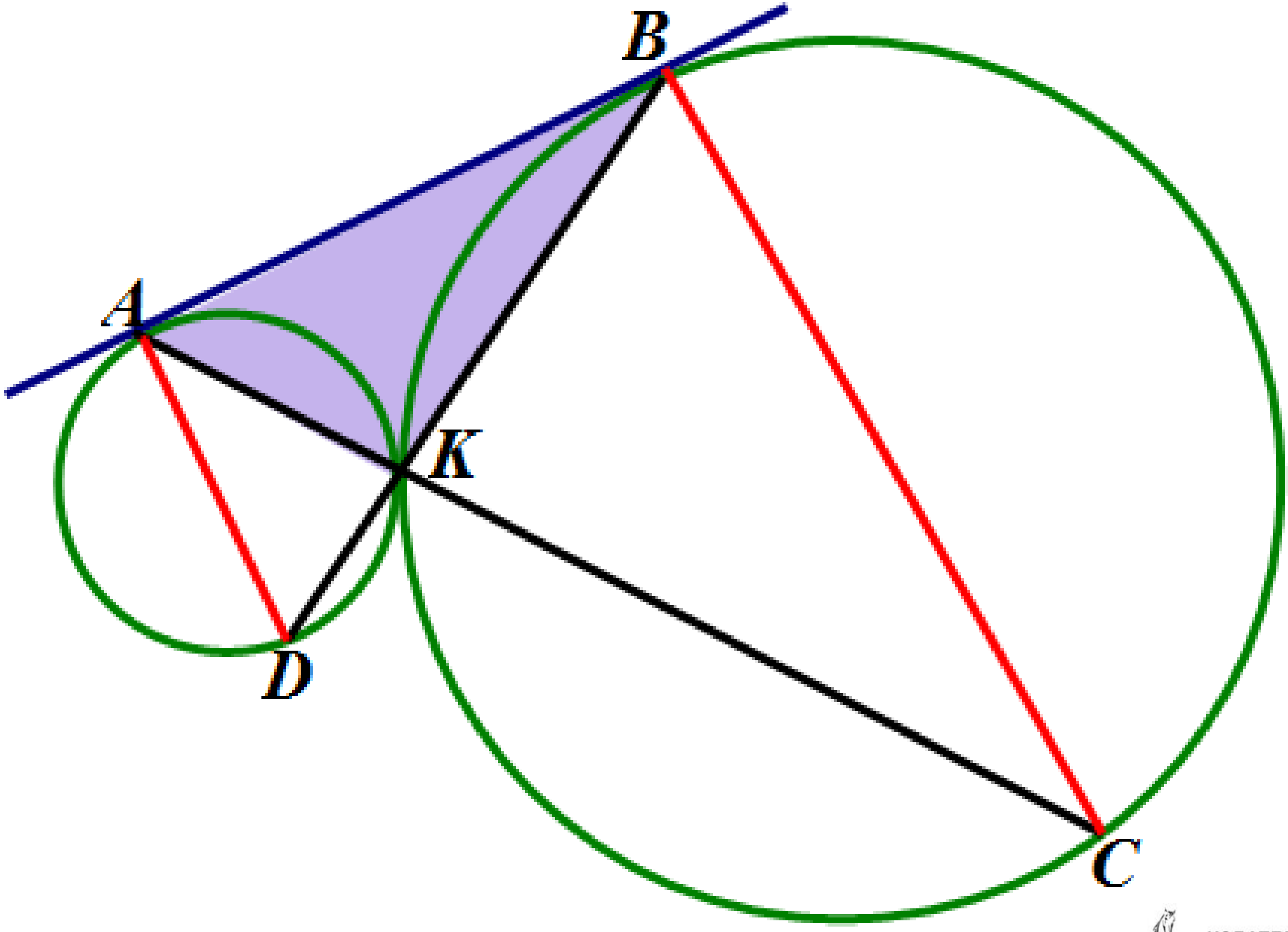
$$4\sqrt{5} \cdot PH = 4 \cdot 12$$

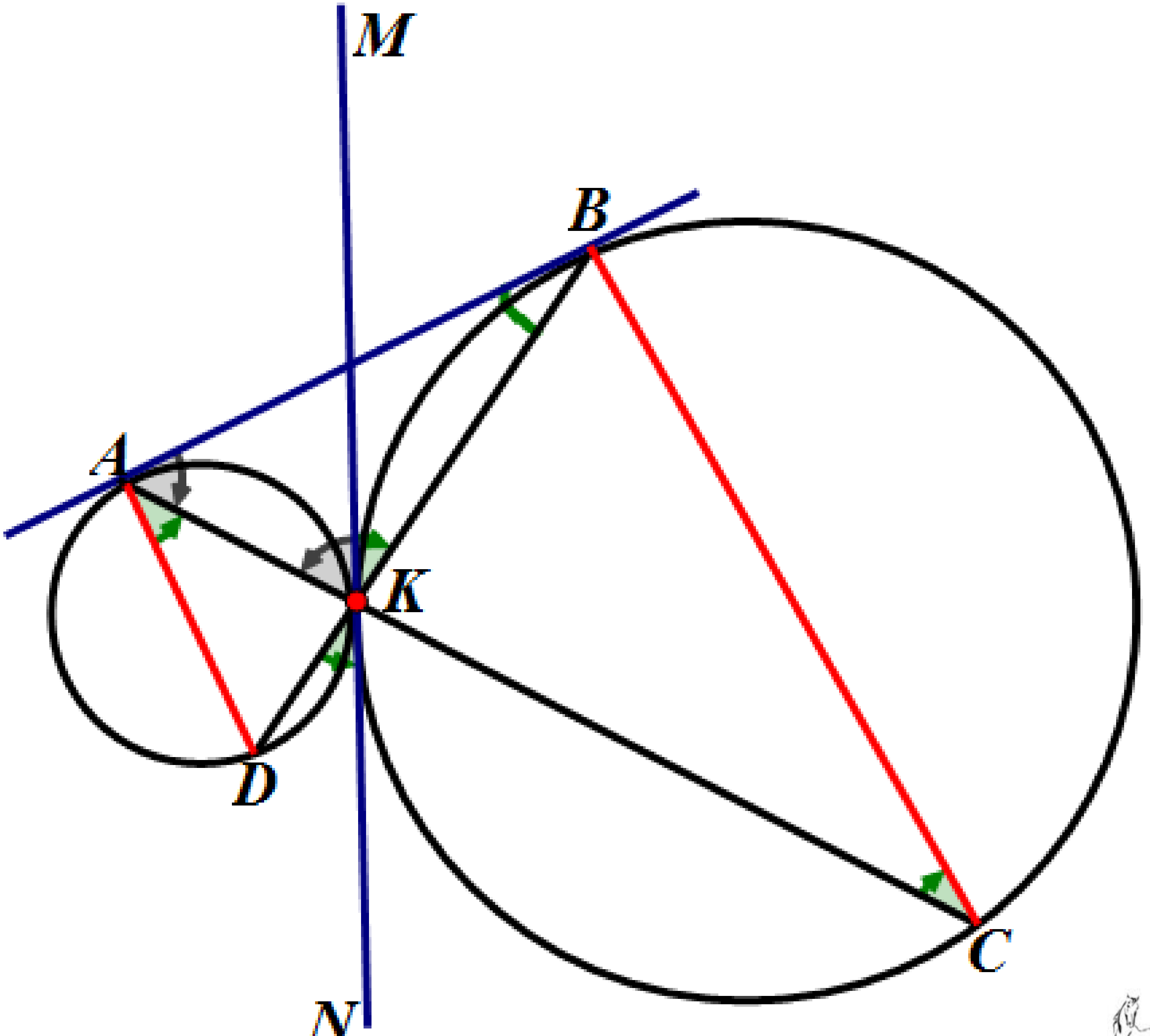
$$PH = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$



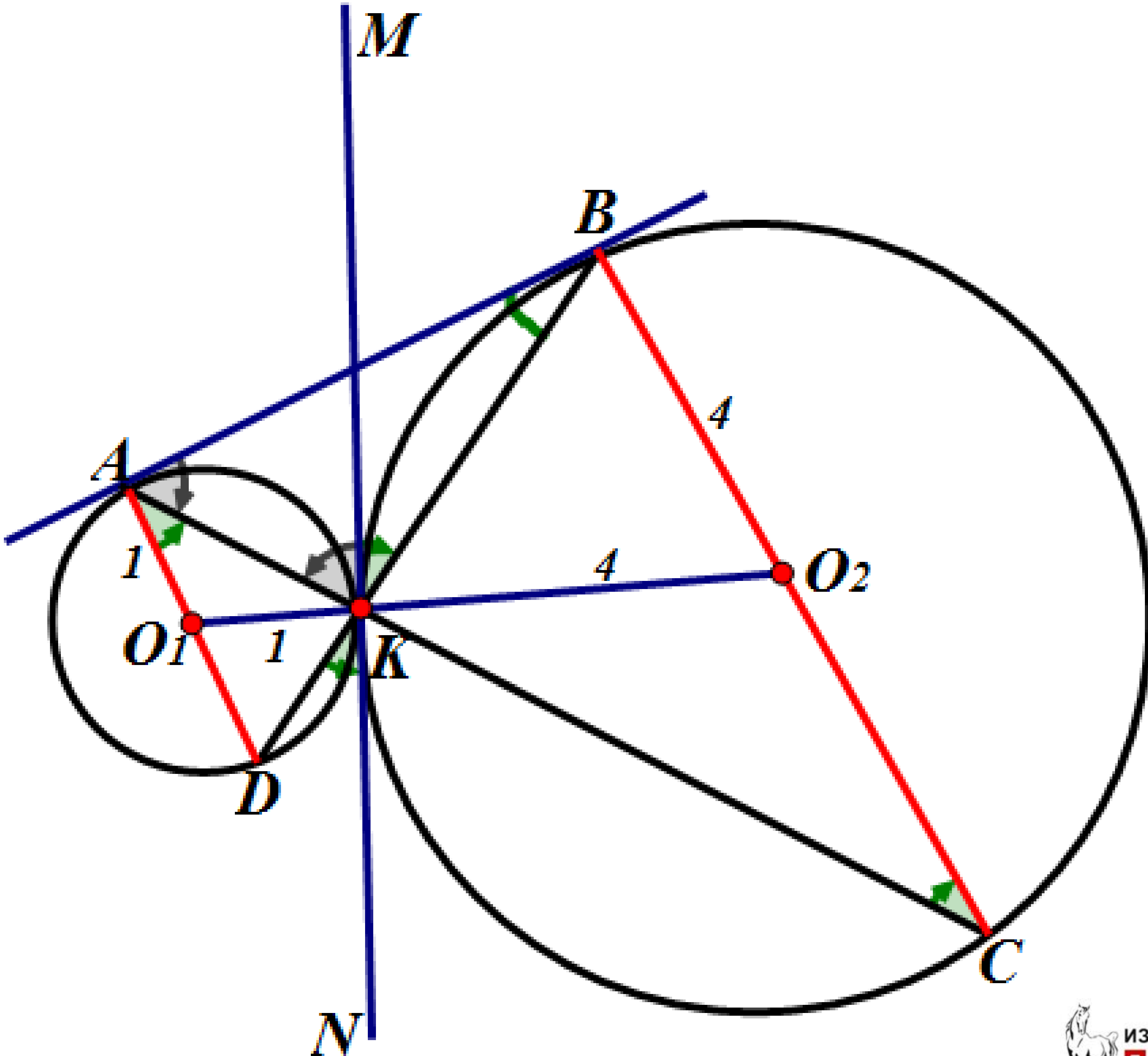
Задача 4

Две окружности касаются внешним образом в точке K.
Прямая AB касается первой окружности в точке A,
а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую
Окружность в точке D, прямая AK пересекает
вторую окружность в точке C.
а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно,
что радиусы окружностей равны 4 и 1.


B
A
K
D
C



ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН



M
B
4
A
1
O2
4
O1
1
K
D
C
N

$\Delta SKO_1 \sim \Delta O_1TO_2$

$$\frac{SK}{TO_2} = \frac{O_1K}{O_1O_2} \qquad \frac{SK}{3} = \frac{1}{5}$$

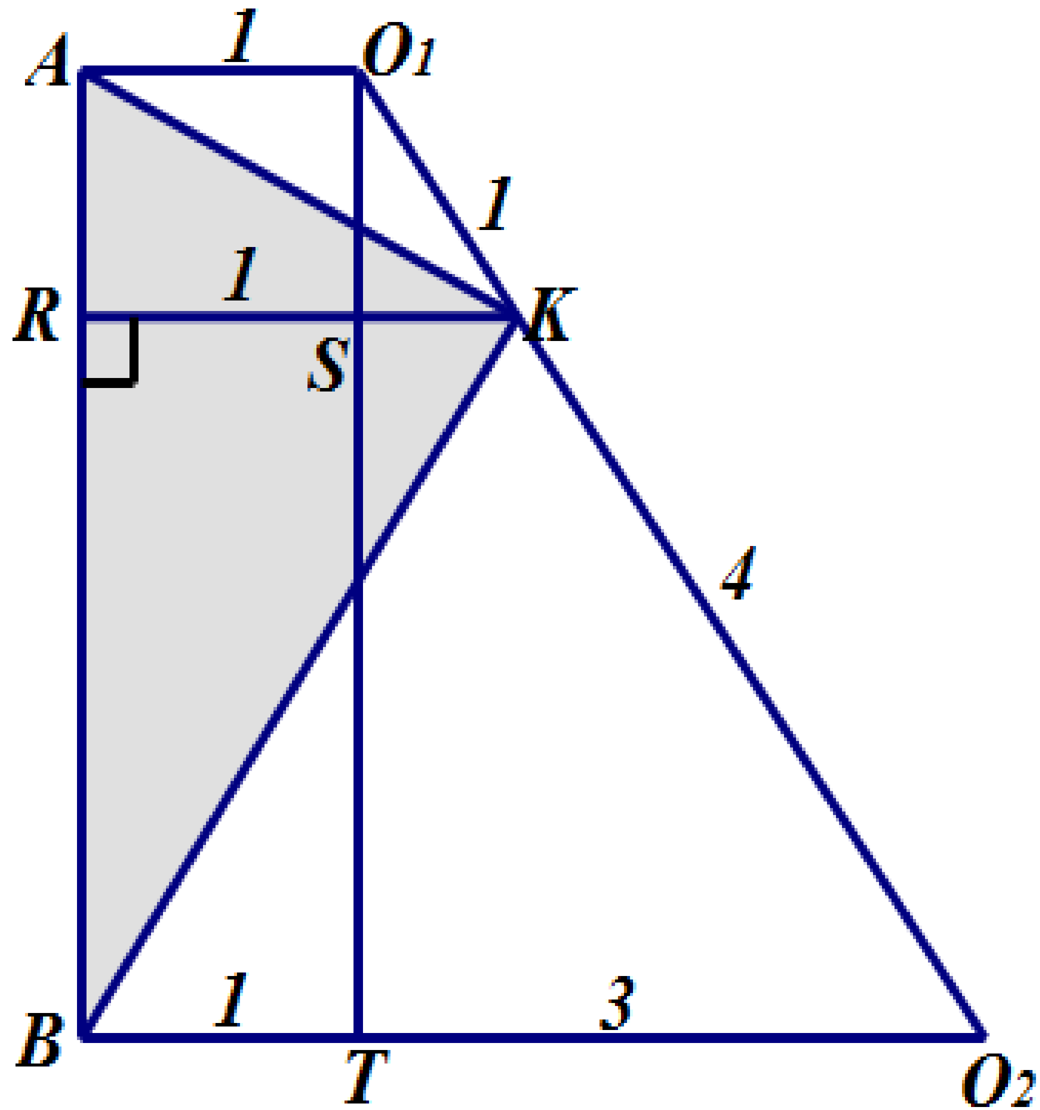
$$SK = \frac{3}{5} \qquad RK = \frac{8}{5}$$

$$AB = O_1T = \sqrt{O_1O_2{}^2 - TO_2{}^2}$$

$$AB = 4$$

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} AB \cdot RK$$

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

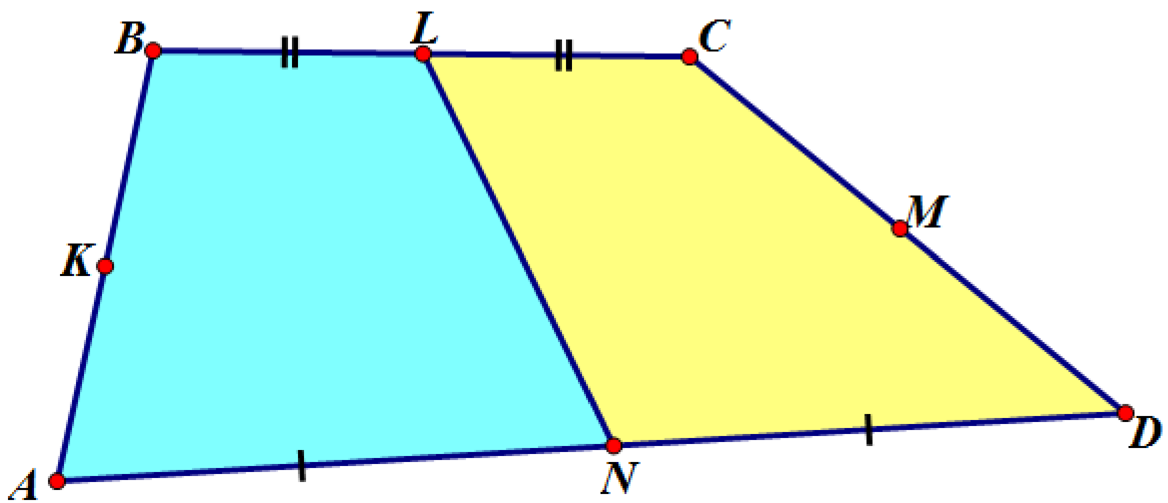


Задача 5

В выпуклом четырехугольнике ABCD точки K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно. Площади четырехугольников ABLN и NLCD равны, а площади четырехугольников KBCM и AKMD относятся как 11:17.

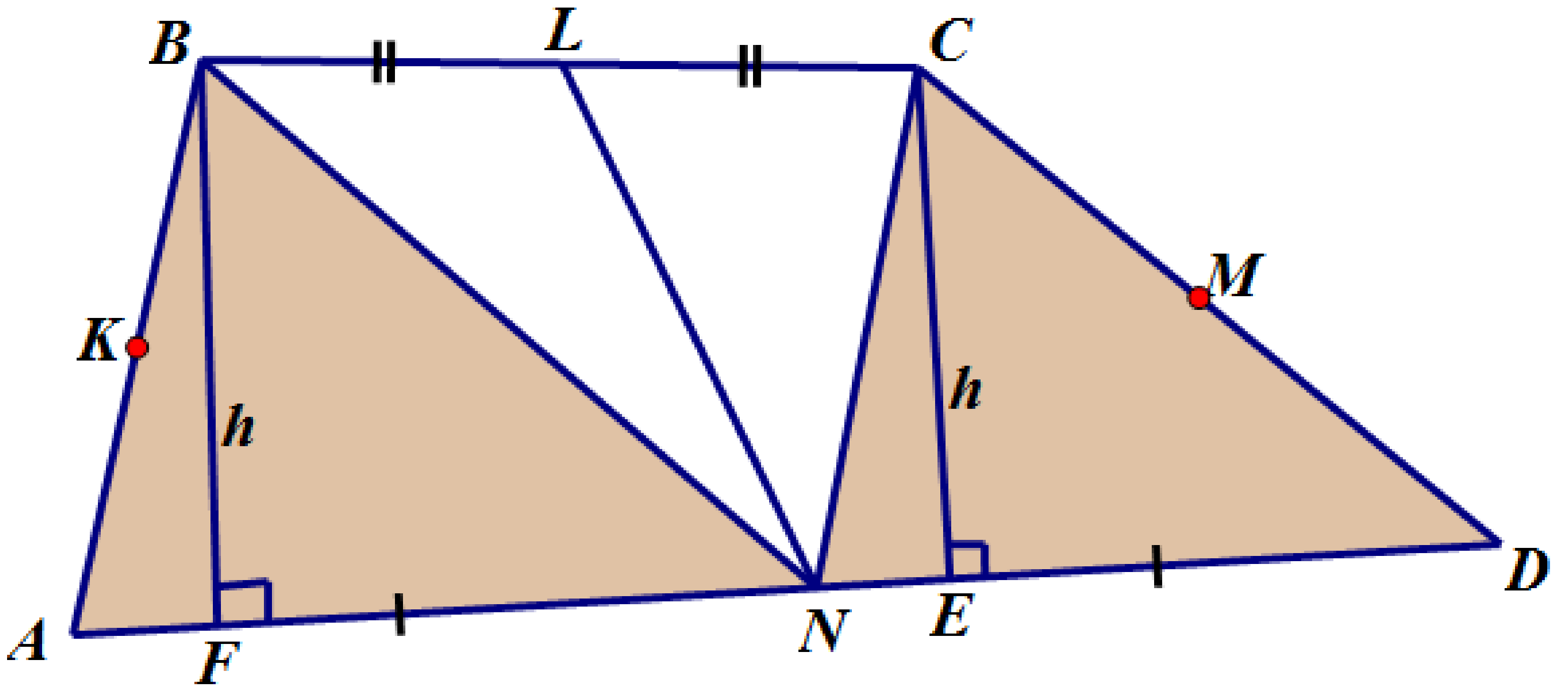
а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите отношение BC к AD.



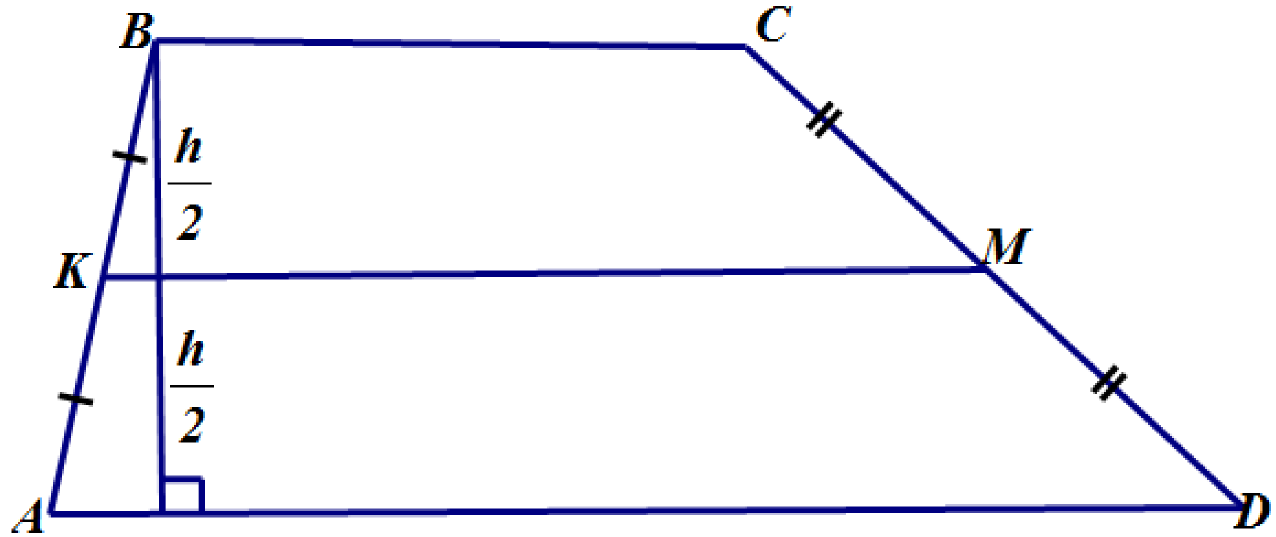
Решение.

а)



ABCD – трапеция.

$$\frac{S_{KBCM}}{S_{AKMD}} = \frac{11}{17}$$



$$\frac{S_{KBCM}}{S_{AKMD}} = \frac{\frac{BC+KM}{2}\cdot\frac{h}{2}}{\frac{AD+KM}{2}\cdot\frac{h}{2}} = \frac{BC+KM}{AD+KM}$$

$$KM = \frac{1}{2}(BC+AD)$$

$$\frac{3BC+AD}{3AD+BC} = \frac{11}{17}$$

$$51BC + 17AD = 33AD + 11BC$$

$$40BC = 16AD$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{2}{5}$$

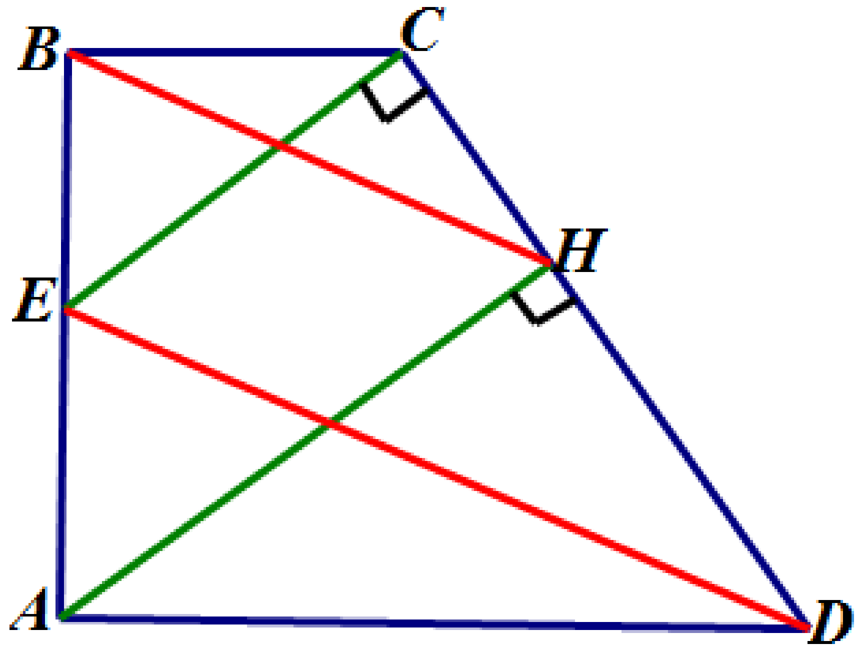
ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

Задача 6. (ЕГЭ 2016)

Пример 12. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.



Решение. а)

$$\frac{OB}{OE}=\frac{OH}{OD}\,?$$

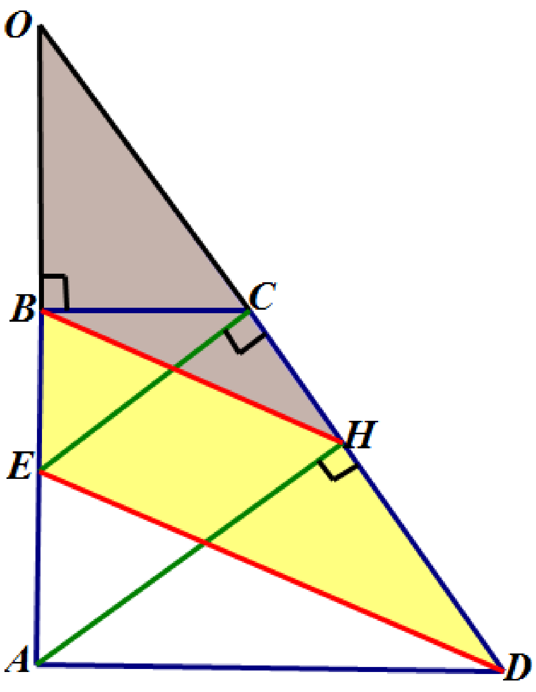
$$\frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OD}$$

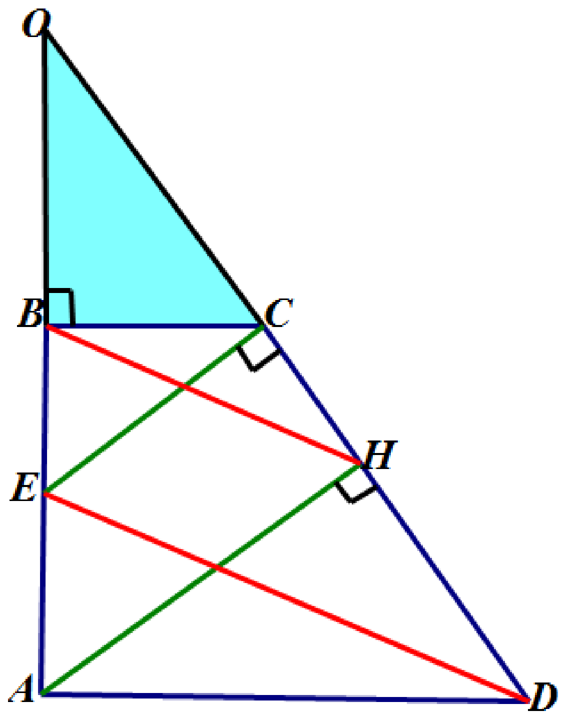
$$\frac{OC}{OH}=\frac{OE}{OA}$$

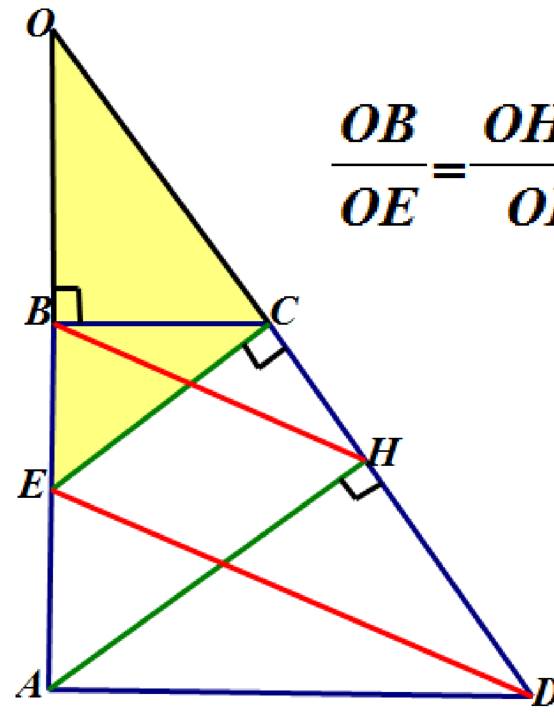
$$OC=\frac{OH\cdot OE}{OA}$$

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OH\cdot OE}{OA\cdot OD}$$

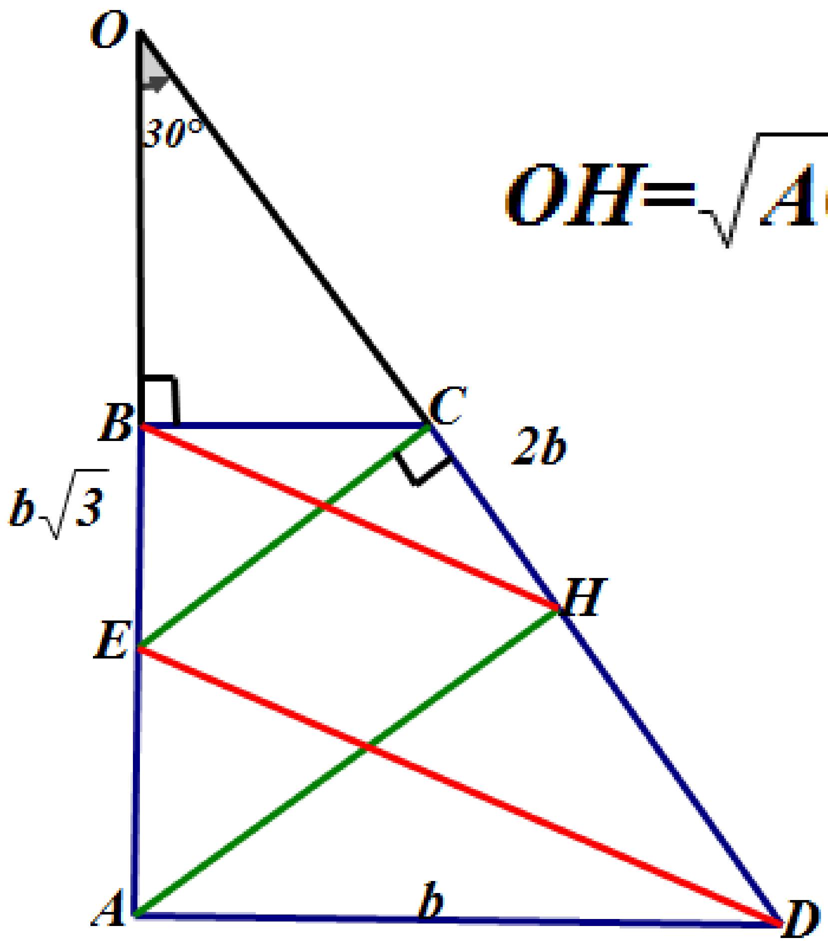
$$\frac{OB}{OE}=\frac{OH}{OD}$$







б) $b \cdot b\sqrt{3} = 2b \cdot AH$ $\qquad AH = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$

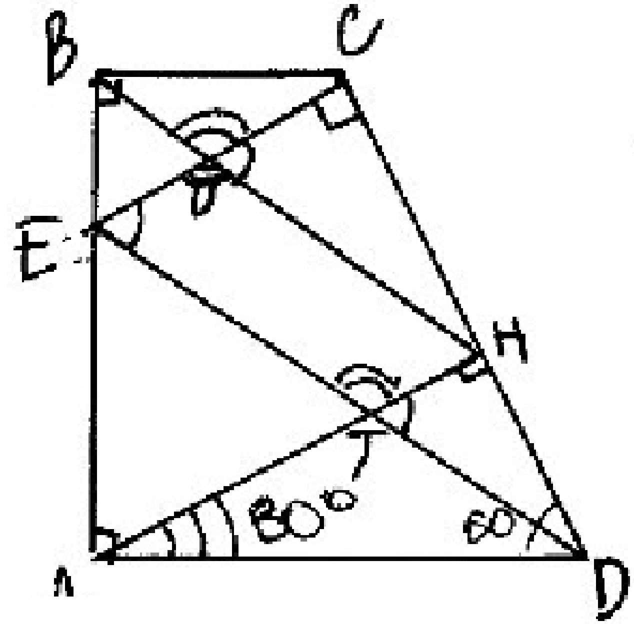


$$OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{3b^2 - \frac{3}{4}b^2} = \frac{3}{2}b$$

$$\frac{BH}{ED} = \frac{OH}{OD} = \frac{3}{2}b : 2b = \frac{3}{4}$$

Ответ. 3:4

Решение ученика



Док-ть, что BH ∥ ED.

1.) Докажем парал. BH EC и AH, они ∥, т.к. ⊥ одной стороне CD (EC ⊥ CD; AH ⊥ CD ⇒ EC ∥ AH)

∠EUH = ∠BUC, т.к. смежные

∠CUH = ∠180° − ∠CUB = ∠UET (накр.леж ~~смежные~~)

∠EUH + ∠UET = 180°   ∠UET = CUH т.к. накр.леж.

Рассм о-ки UCH, ECD и THD — подобные т.к. они прямоуг. в треугольнике CUH ∠CUH = ∠CED в CED (накр.леж)

∠HDT = ∠CDE т.к. ∠ общ. ⇒ △ECD подобен △CUH и △HTD по двум углам ⇒

⇒ △HTD подобен △UCH. ⇒ ∠CUH = ∠HTD

а угол HTE = 180 − ∠HTD = 180 − CUH ⇒

⇒ EUHT — параллелограм, т.к. противоположные углы равны ⇒ UH ∥ ET ⇒ BH ∥ ED

0 баллов

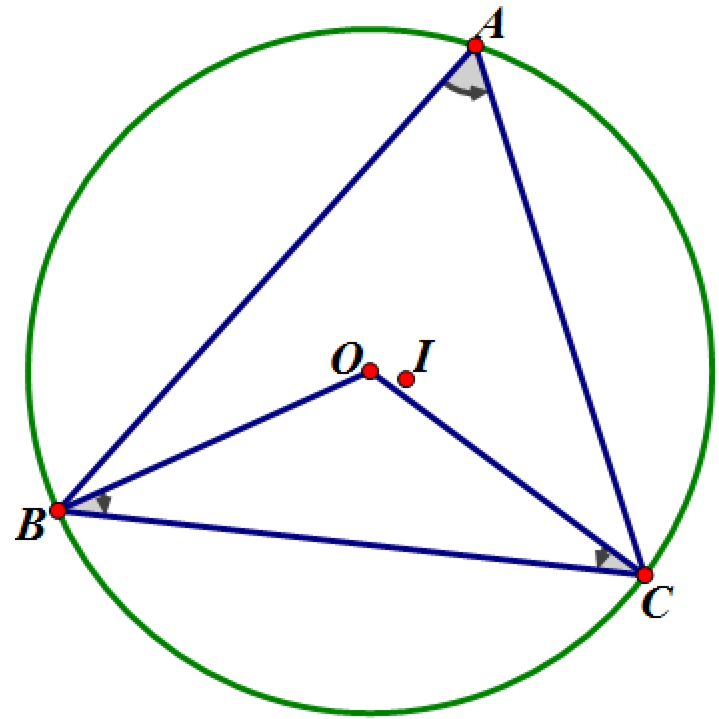
Задача 7

Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I – центр вписанной в него окружности, H – точка пересечения высот. Известно, что

$\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB.$

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите $\angle OIH$, если угол $ABC = 50°$.



Решение.

1. $\angle BOC = 2\angle A$,

$\angle BOC = 180° - (\angle OBC + \angle OCB) =$

$= 180° - \angle A \Rightarrow 2\angle A = 180° - \angle A$

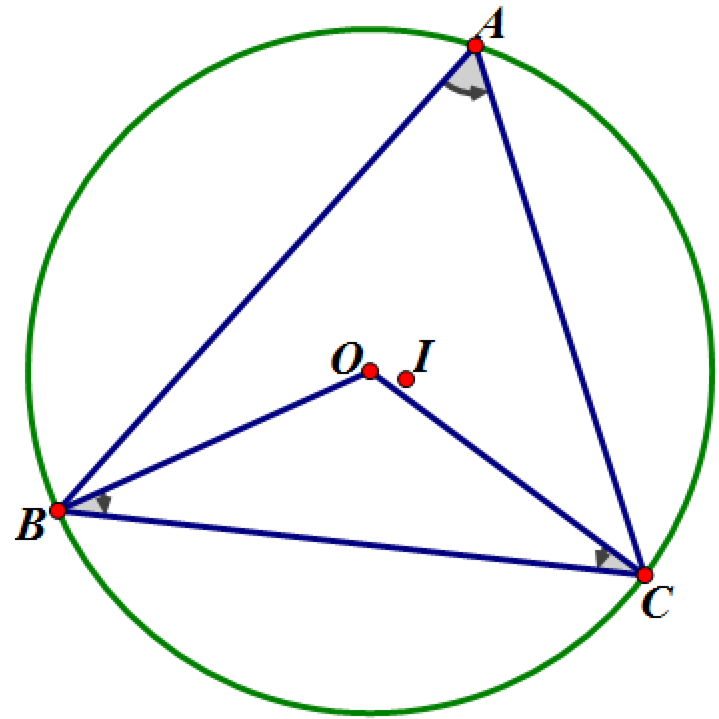
$\angle A = 60°$, $\angle BOC = 120°$

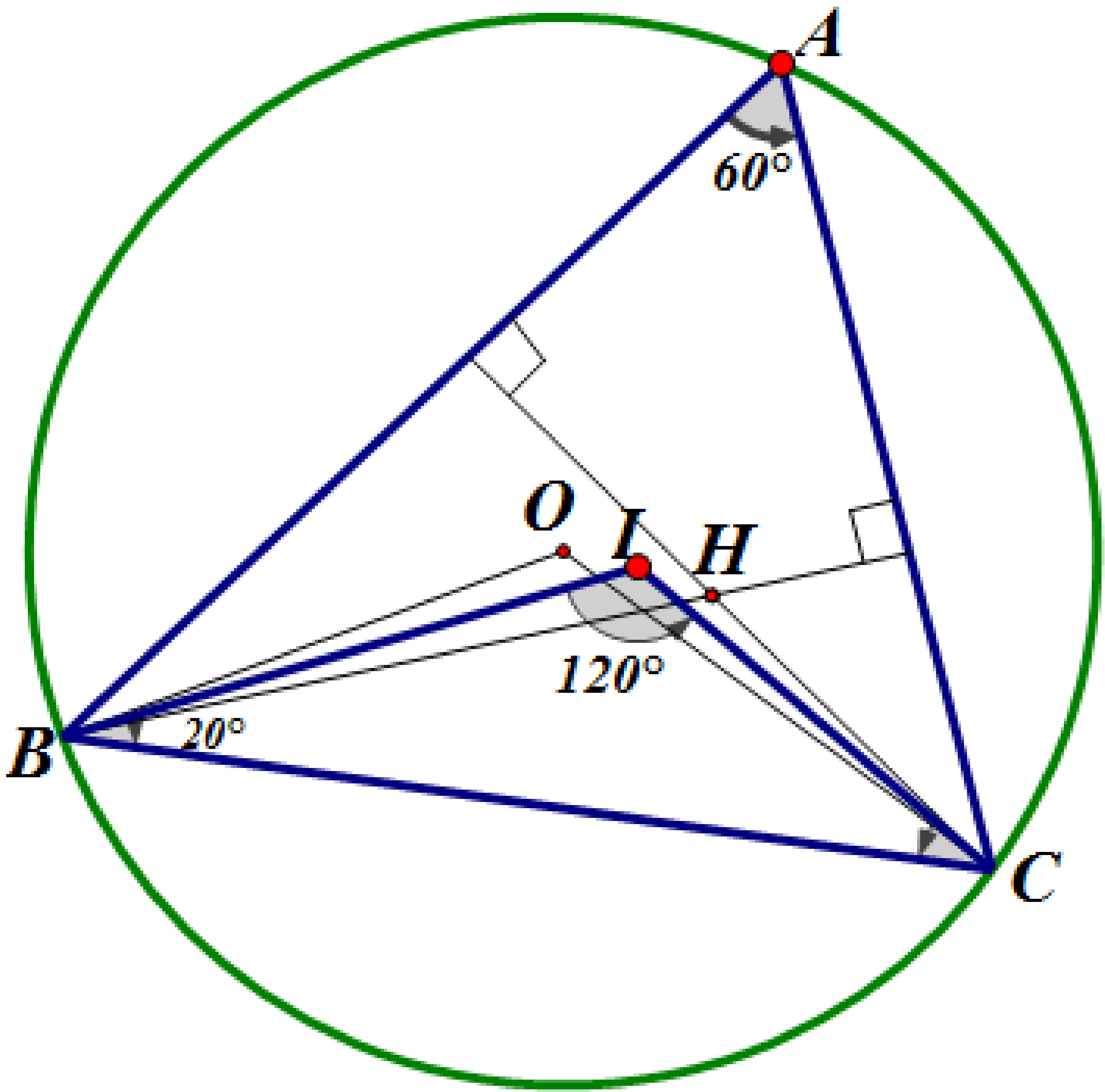
$\underline{\angle A = 60°, \angle B = 50° \Rightarrow \angle C = 70°.}$

2. ΔBOC: $\angle OBC = OCB = 30° \Rightarrow$

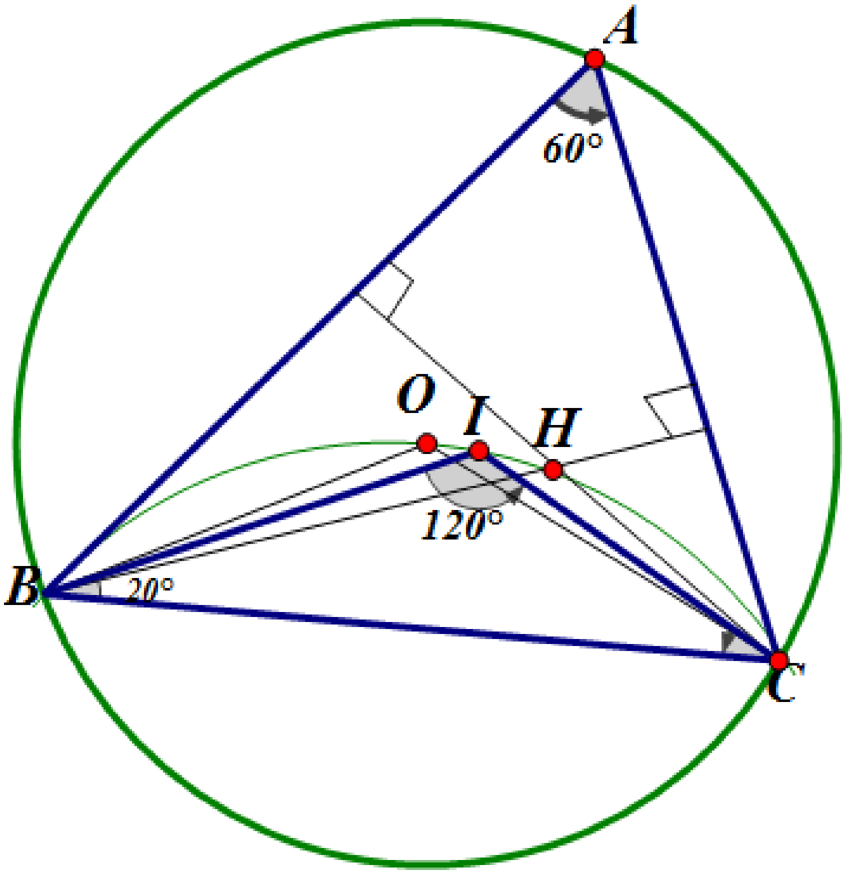
$\angle ABO = 50° - 30° = 20°$

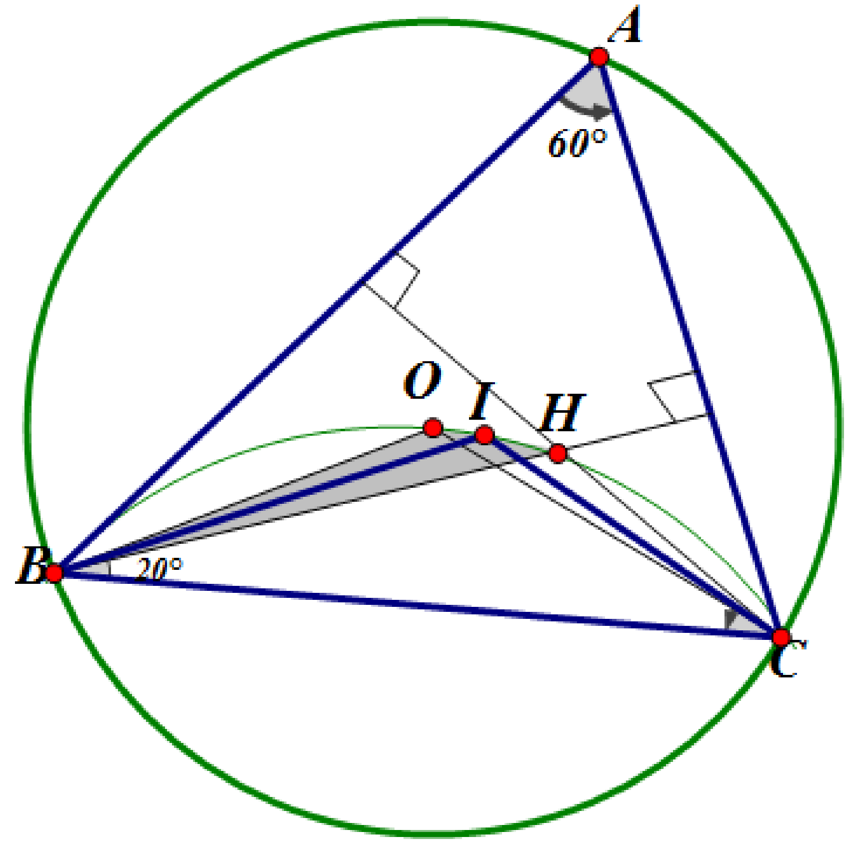
$\angle ACO = 70° - 30° = 40°$





A
60°
O
I
H
120°
B
20°
C





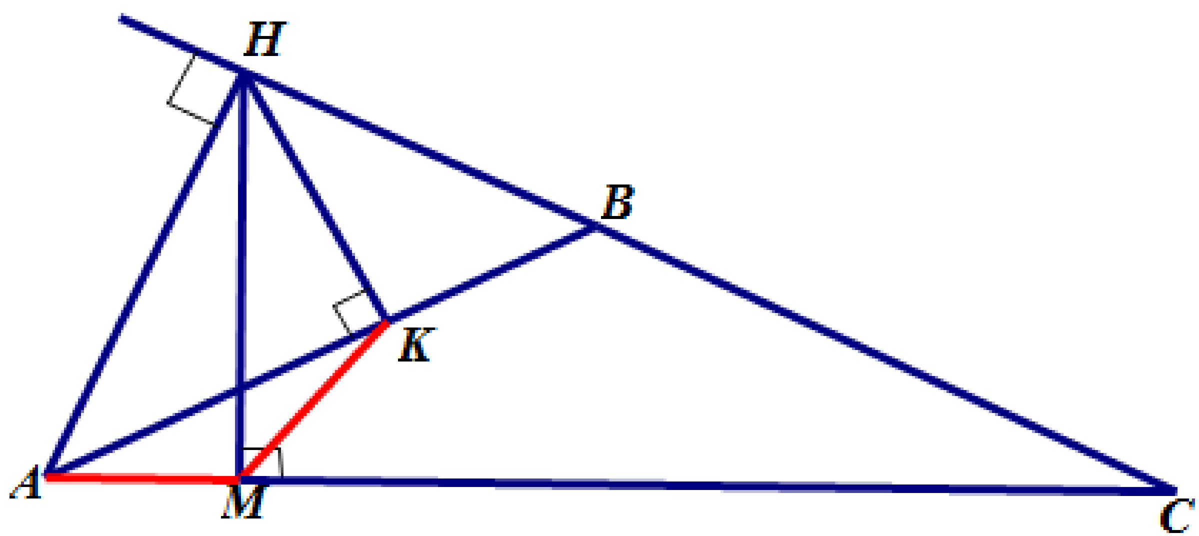
$\angle OIH + \angle OBH = 180°$, $\angle OBH = 10° \Rightarrow \angle OIH = 170°$

Задача 8

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжении боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

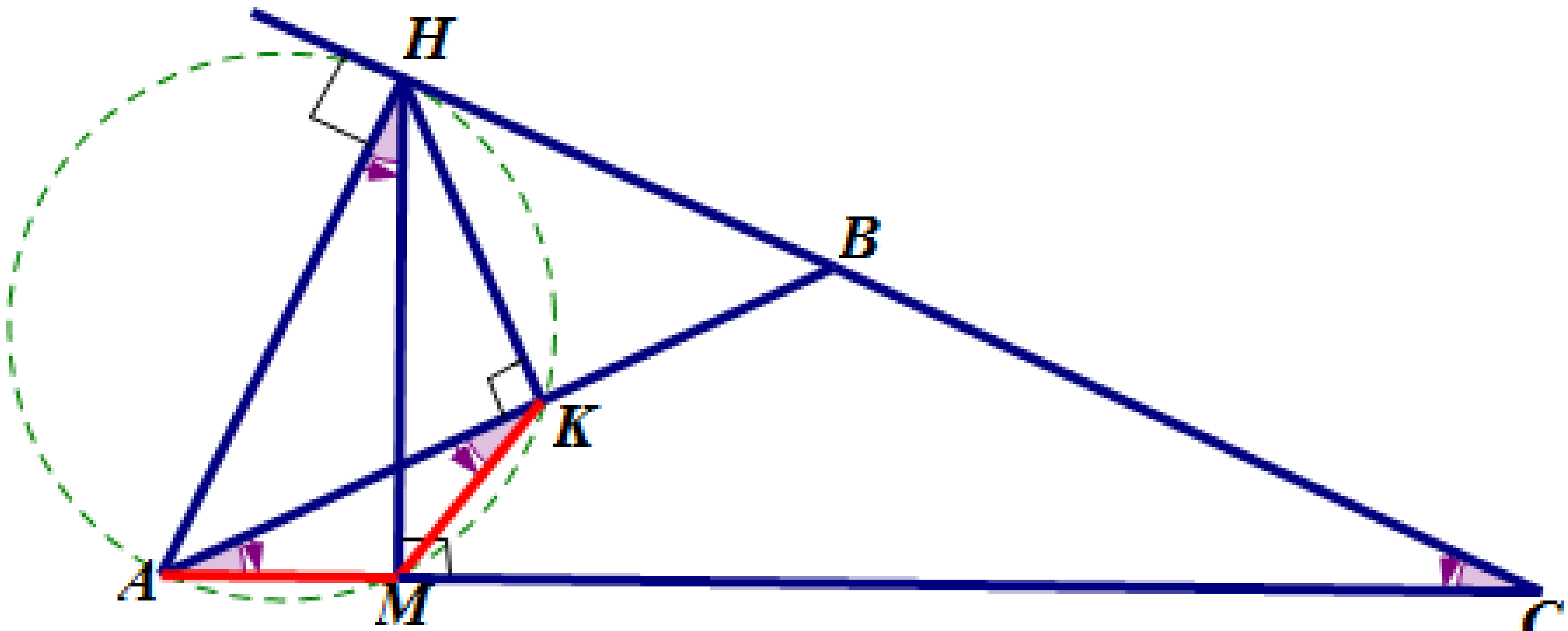
а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK, если AB=5, AC=8.

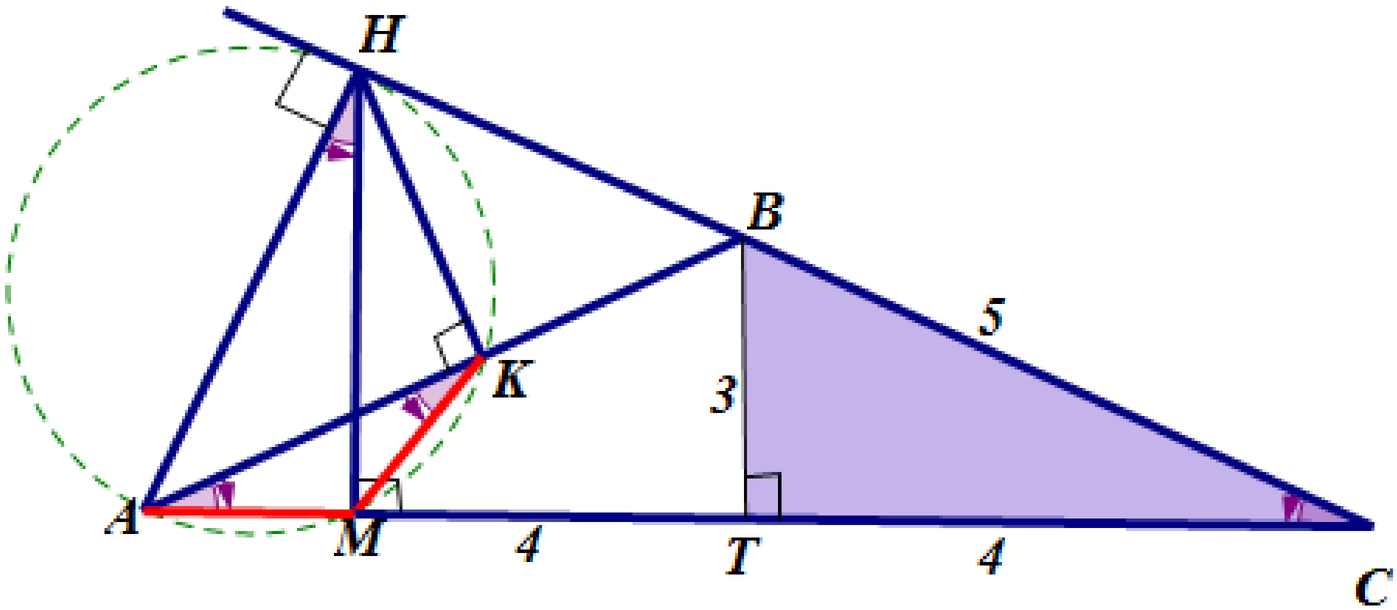


Решение

а)



б)



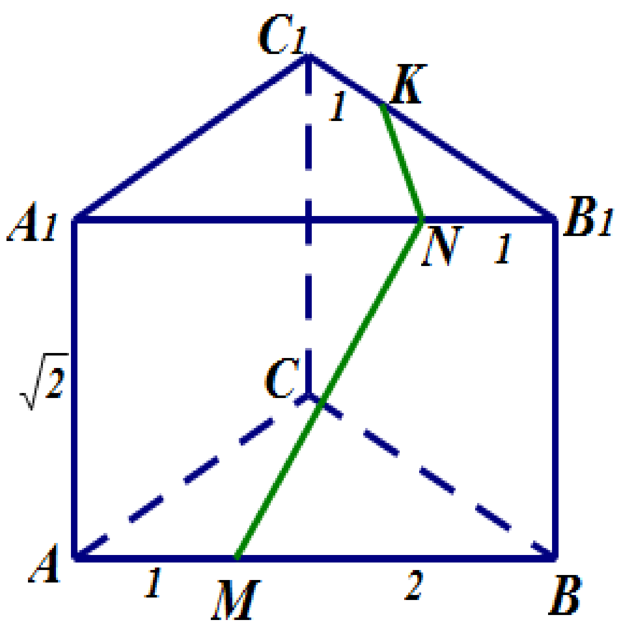
$$\sin C=\frac{3}{5}\qquad \frac{AM}{AH}=\sin\angle AHM=\sin C=\frac{3}{5}\ \Rightarrow\ AM=\frac{3}{5}AH$$

$$\frac{AH}{AC}=\sin C=\frac{3}{5}\ \Rightarrow\ AH=AC\cdot\sin C=8\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{5}$$

$$AM=\frac{3}{5}AH=\frac{3}{5}\cdot\frac{24}{5}=\frac{72}{25}=2{,}88$$

Задача 9

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро равно $\sqrt{2}$. На ребрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM=B_1N=C_1K=1$.



а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что MNKN – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

Решение. а)

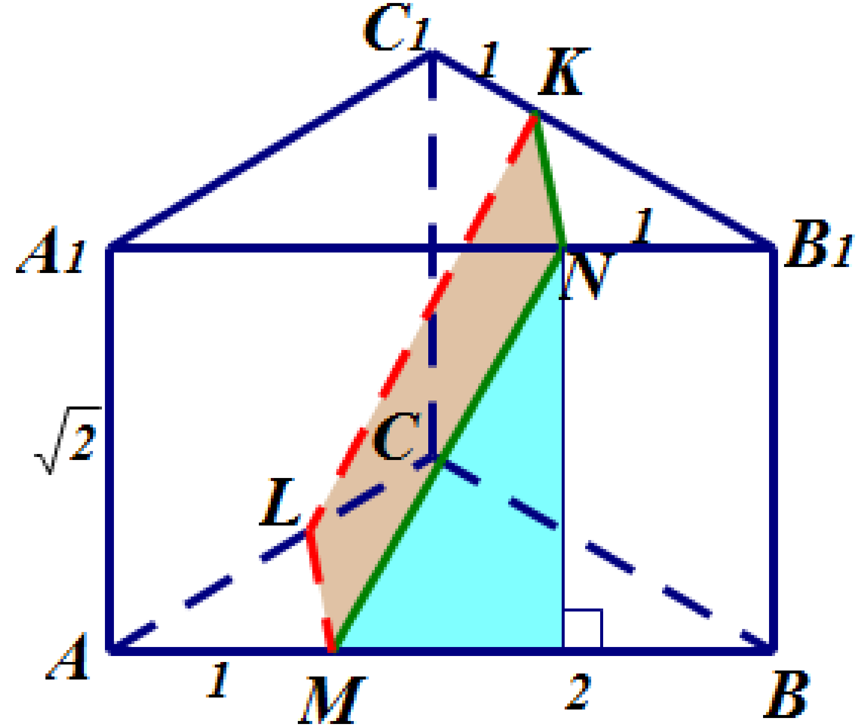
KN||LM, KN=LM=$\sqrt{3}$

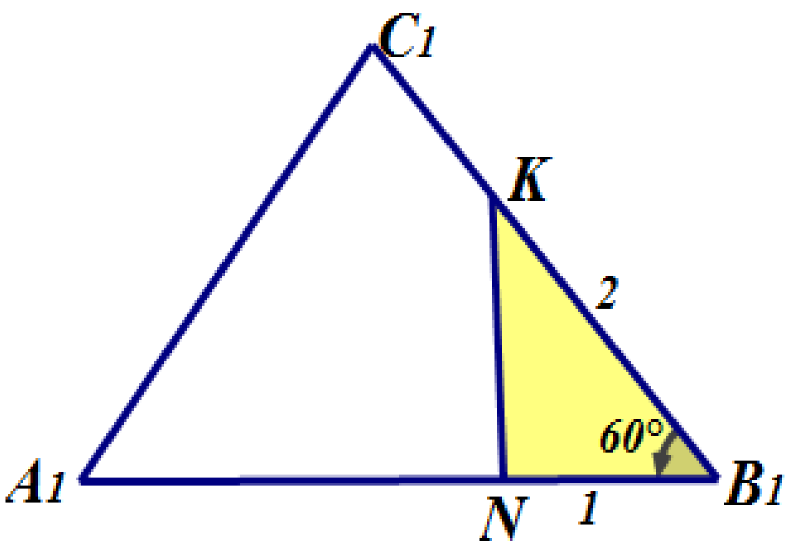
(По т. косинусов

KN=$\sqrt{3}$ ⇒ ΔKNB_1 прямоугольный ⇒

$KN \perp A_1B_1$

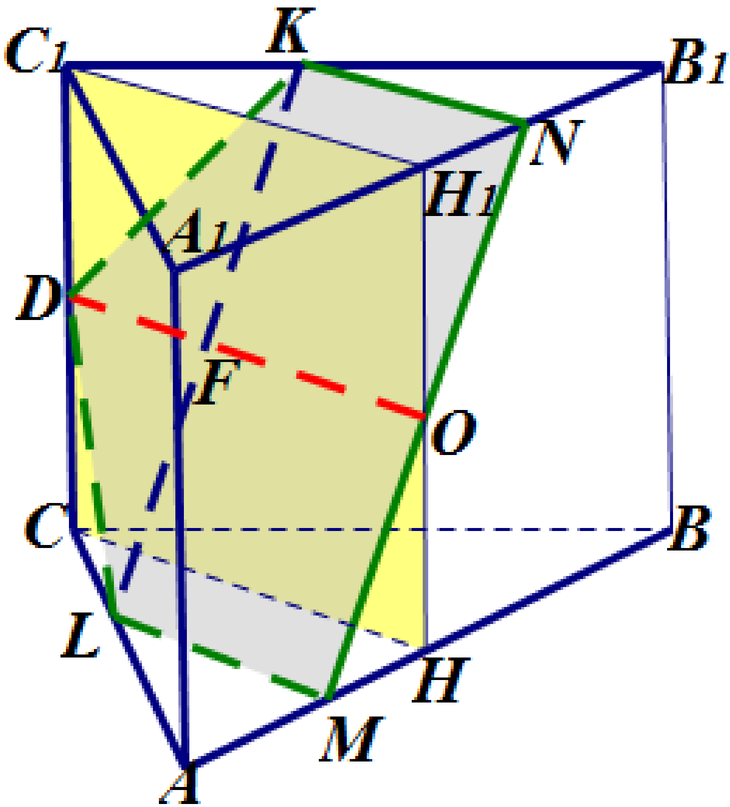
$\Delta ALM=\Delta KNB_1$. MN=$\sqrt{3}$





$KN \perp ABB_1 \Rightarrow KN \perp MN$

⇒MNKL –квадрат.



$$S_{сеч} = S_{MNKL} + S_{DLK}$$

$$DF \perp KL$$

$$DO = CH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$DF = DO - FO = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{DLK} = \frac{1}{2} KL \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$S_{сеч} = 3 + \frac{3}{4} = 3{,}75$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

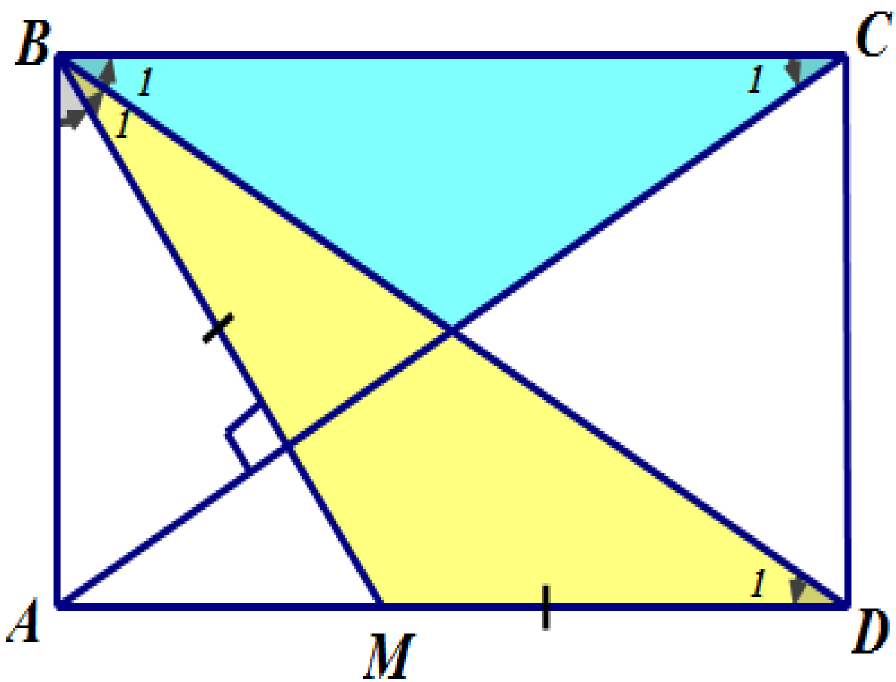
Задача 10 (Вариант МА10610 (профильный уровень 6.03.Статград)

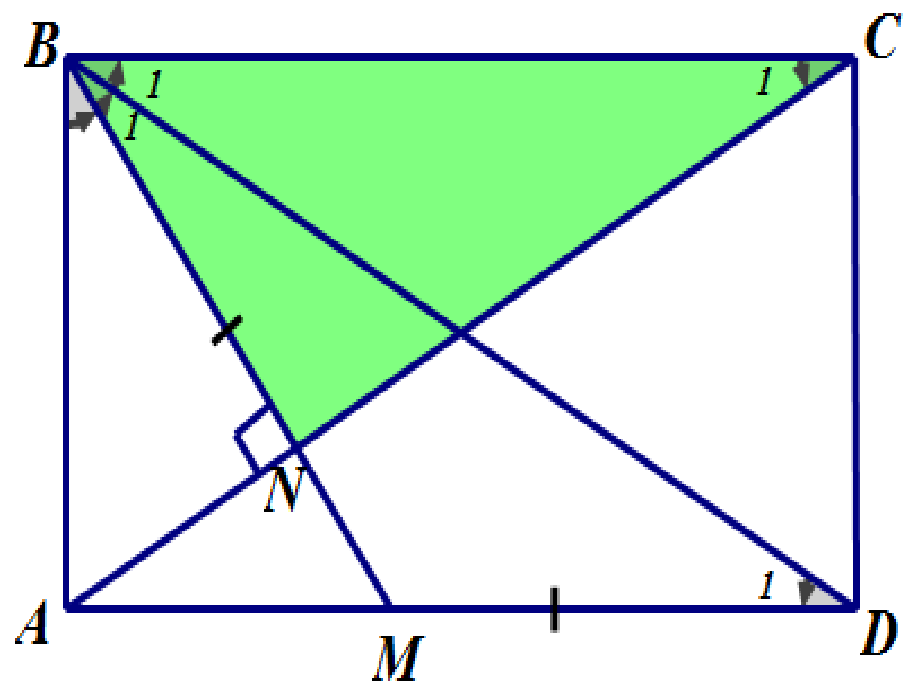
Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника ABCD перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудаленной от вершин B и D.

а) Докажите, что лучи BM и BD делят угол ABC на три равные части.

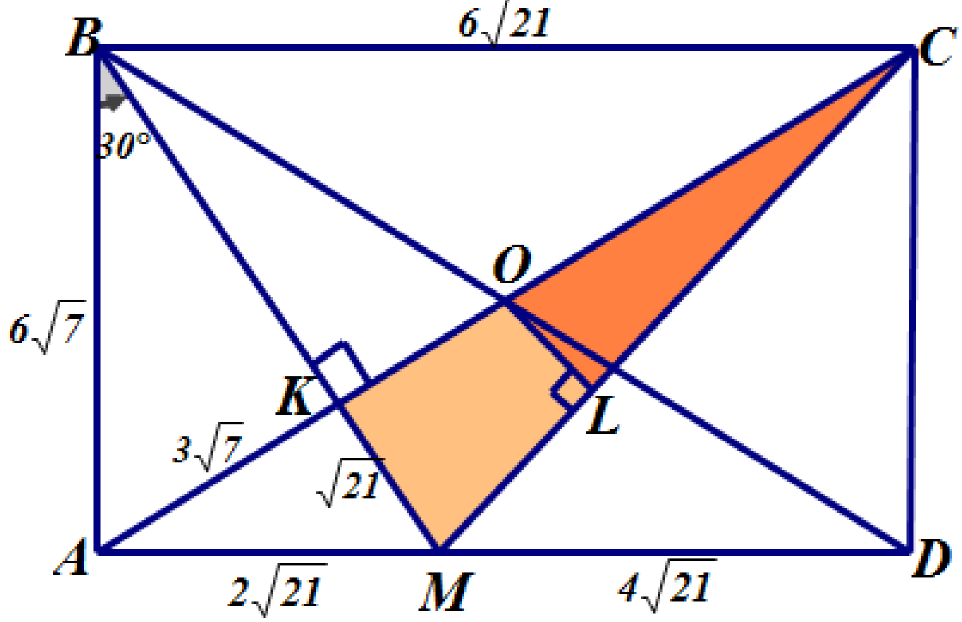
б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если BC=$6\sqrt{21}$.

Решение. а)





б) Способ 1



$$\Delta OLC \sim \Delta CKM$$

$$\frac{OL}{KM} = \frac{OC}{CM}$$

$$OL = \frac{KM \cdot OC}{CM}$$

$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + CD^2}}{2}$$

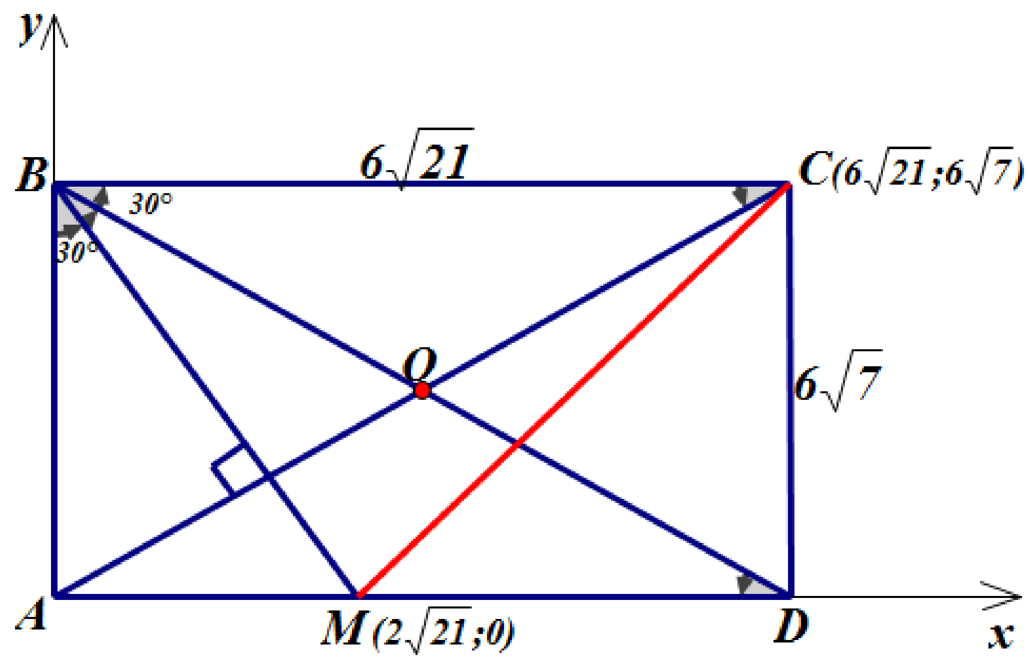
$$OL = \frac{\sqrt{21} \cdot 6\sqrt{7}}{14\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3} \cdot 6}{14\sqrt{3}} = 3$$

$$OC = 6\sqrt{7}$$

$$CM = 14\sqrt{3}$$

$$KM = \sqrt{21}$$

б) Способ 2



$$\frac{CD}{BC}=tg30° \qquad \frac{CD}{6\sqrt{21}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$CD=6\sqrt{7}$$

$$\frac{AM}{AB}=tg30° \qquad AM=\frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{21}$$

$O(3\sqrt{21};\ 3\sqrt{7})$ CM: $\sqrt{3}x-2y-6\sqrt{7}=0$

Расстояние d от точки $M(x_0;\ y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$

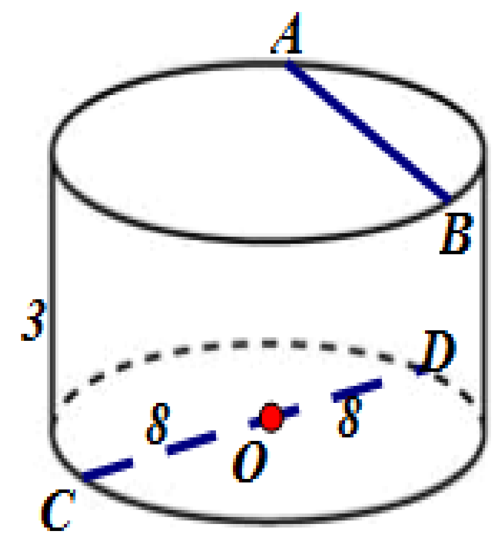
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$d=\frac{|\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{21}-2\cdot 3\sqrt{7}-6\sqrt{7}|}{\sqrt{3+4}}=3$$

Задача 11 (Вариант МА10610 (профильный уровень 6.03.Статград)

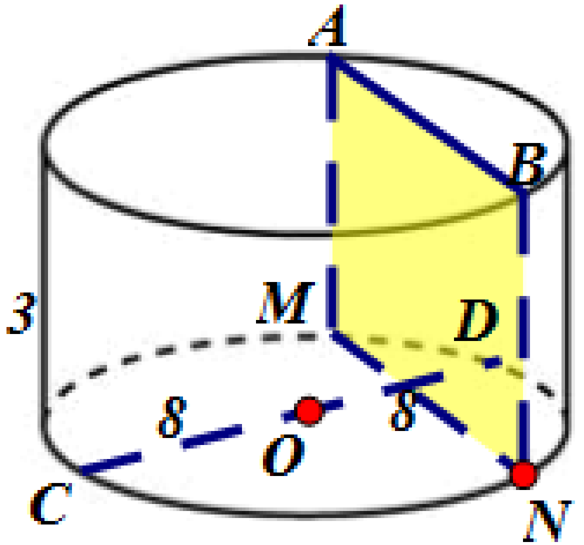
В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведен диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение ABNM, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведен диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
б) Найдите объем пирамиды CABNM.

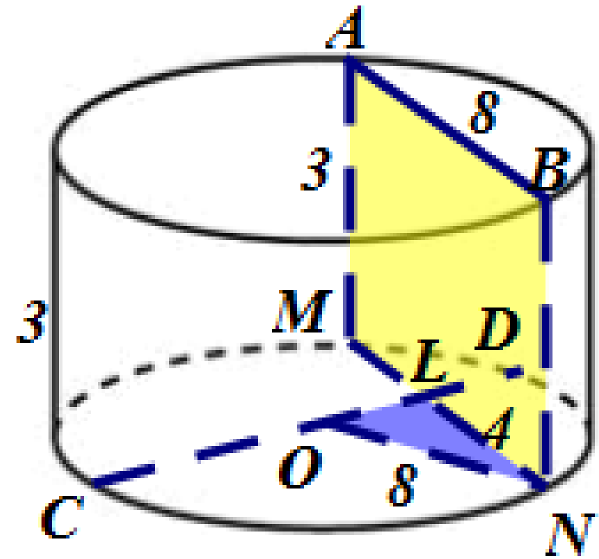


Решение

а)



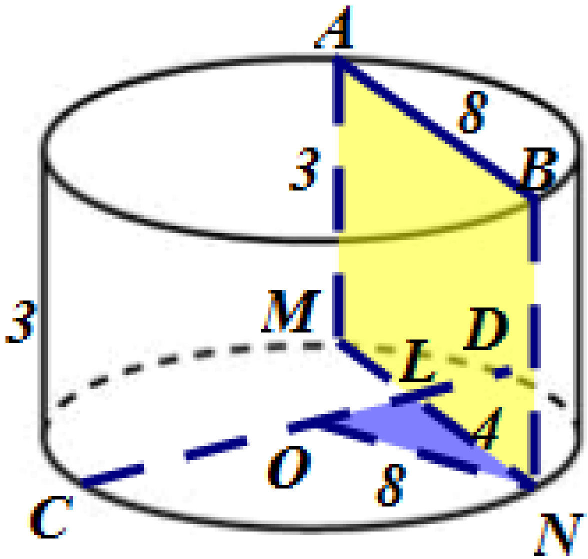
б)



Проведем образующие AM и BN. AM||BN, AM=BN; AM⊥AB. ABNM – прямоугольник ⇒ AN=BM.

CD ⊥AB, AB||MN ⇒CD ⊥MN.
ML=LN. CL - высота пирамиды CABNM.
ΔOLN – прямоугольный.
OL=$\sqrt{ON^2 - LN^2} = \sqrt{64-16} = 4\sqrt{3}$

$$CL = 4(\sqrt{3}+2)$$



$$V_{CABNM} = \frac{1}{3} S_{ABNM} \cdot CL$$

$$S_{ABNM} = AB \cdot AM = 24$$

$$V_{CABNM} = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 4(\sqrt{3} + 2) =$$

$$= 32(\sqrt{3} + 2)$$