Издательство «Легион»

Задачи по стереометрии в ЕГЭ по математике

Фридман Елена Михайловна

Основные факторы успеха

- Время (чем больше времени на подготовку, тем лучше)
- Система (работа по плану, а не от случая к случаю)
- Желание

подготовиться

Причины ошибок в решении стереометрических задач

- ✓ Незнание и/или непонимание аксиом, определений, теорем, а также методов решения задач;
- ✓ неумение их применять, (в том числе, применять их неверно);
- ✓ невнимательное чтение условия и вопроса задания;
- ✓ вычислительные ошибки;
- ✓ нарушения логики в рассуждениях;
- ✓ принятие ошибочных гипотез;
- ✓ недостатки в работе с рисунком.

Задача 14

а) Построение сечения (+ доказательство)

б) Нахождение расстояния, площади фигуры, объема фигуры или её части

б) Нахождение угла

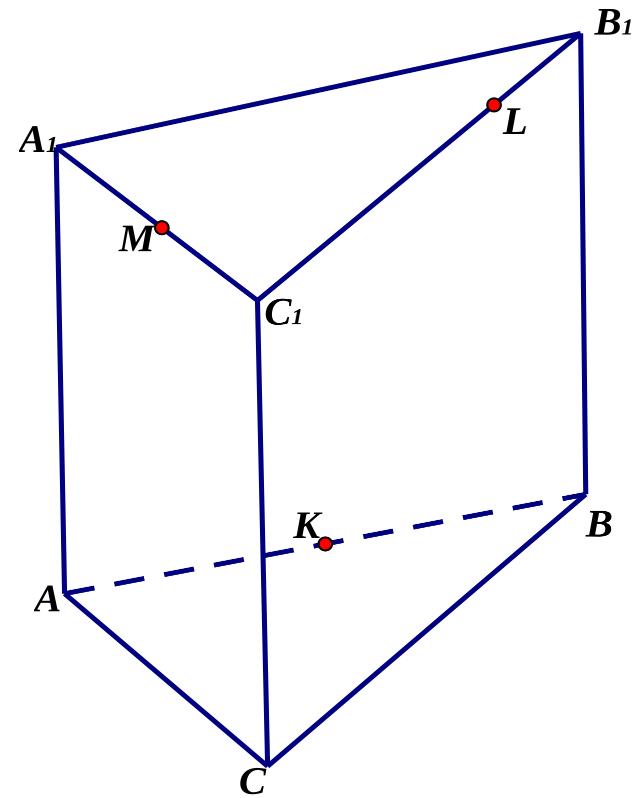
Задача 14 (ЕГЭ 40 вариантов профиль «Легион»)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна $8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1=6$. На ребре B_1C_1 отмечена точка L так, что $B_1L=2\sqrt{3}$. Точки K и M – середины рёбер AB и A_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объем пирамиды, вершина которой – точка M, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

Дано: правильная призма $ABCA_1B_1C_1$.
$AB=8\sqrt{3}$, $B_1L=2\sqrt{3}$, $AK=KB$,
$A_1M=MC_1$, $AA_1=6$.
$\gamma \parallel AC$, $K, L \in \gamma$.
а) Доказать: $BM \perp \gamma$.
б) Найти : $V_{\text{пирамиды}}$

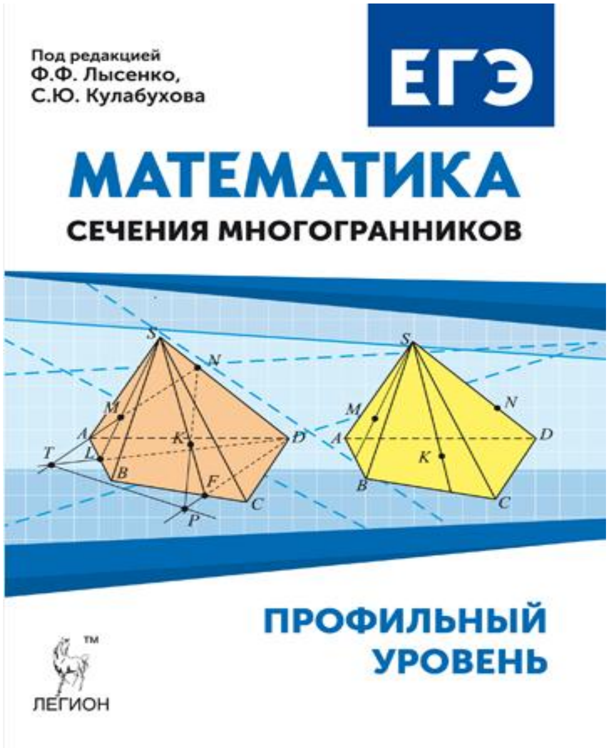


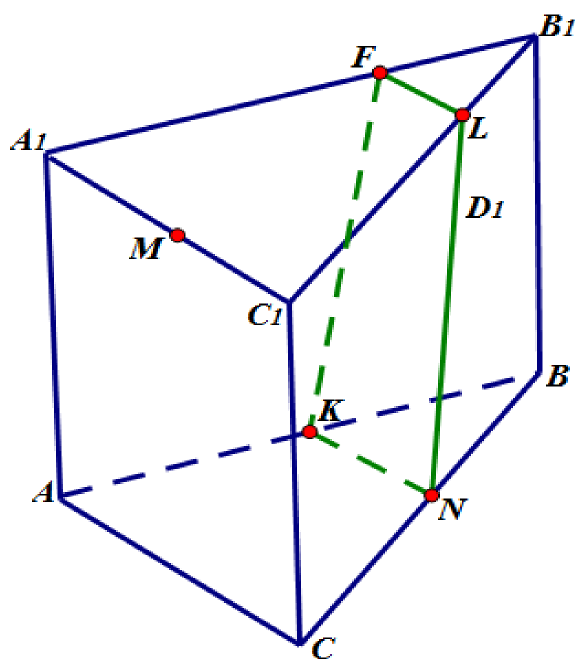
План действий

1. Построение сечения призмы плоскостью γ, проходящей через заданные точки K, L, параллельно прямой AC.
2. Доказательство перпендикулярности прямой BM и плоскости сечения.
3. Нахождение объема пирамиды.

1. Построение сечения

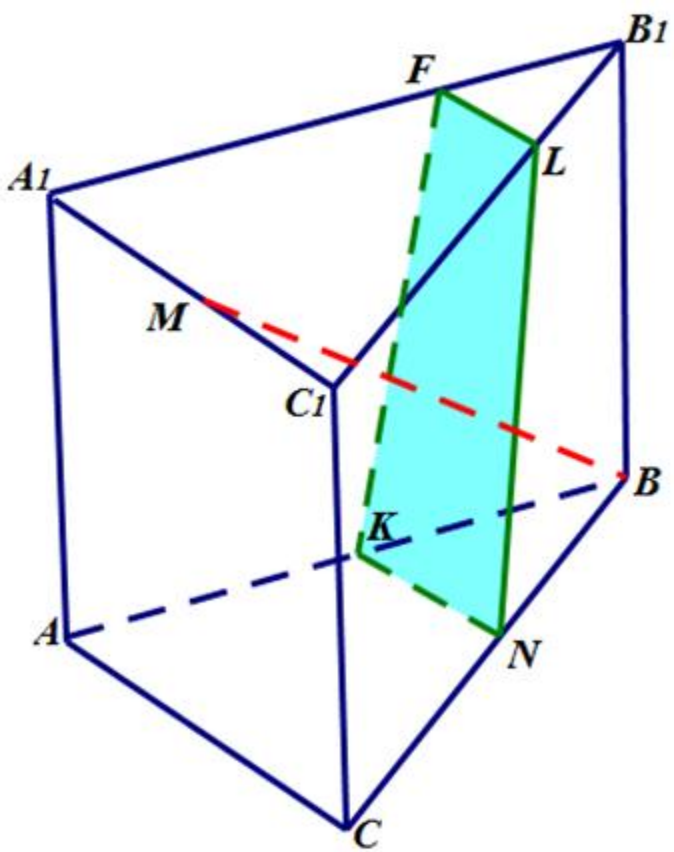
1. В грани нижнего основания проведем KN||AC, в грани верхнего основания – FL|| A_1C_1 ||AC.
2. В грани BB_1C_1C проведем отрезок LN.
3. В грани AA_1B_1B проведем отрезок KF.
4. FLNK – искомое сечение (пересечение плоскости γ и многогранника).

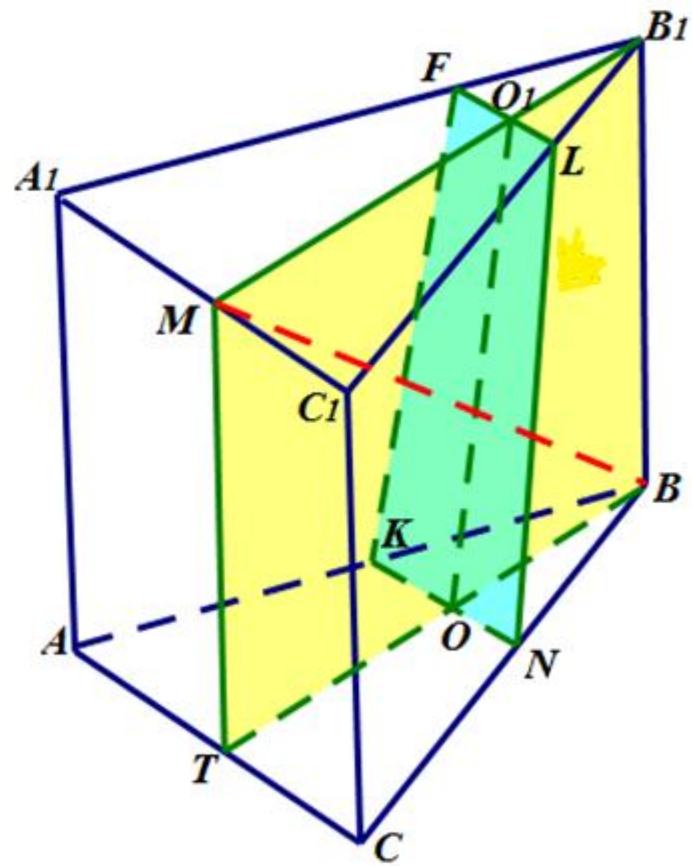




ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru

2. Докажем, что $BM \perp FLNK$



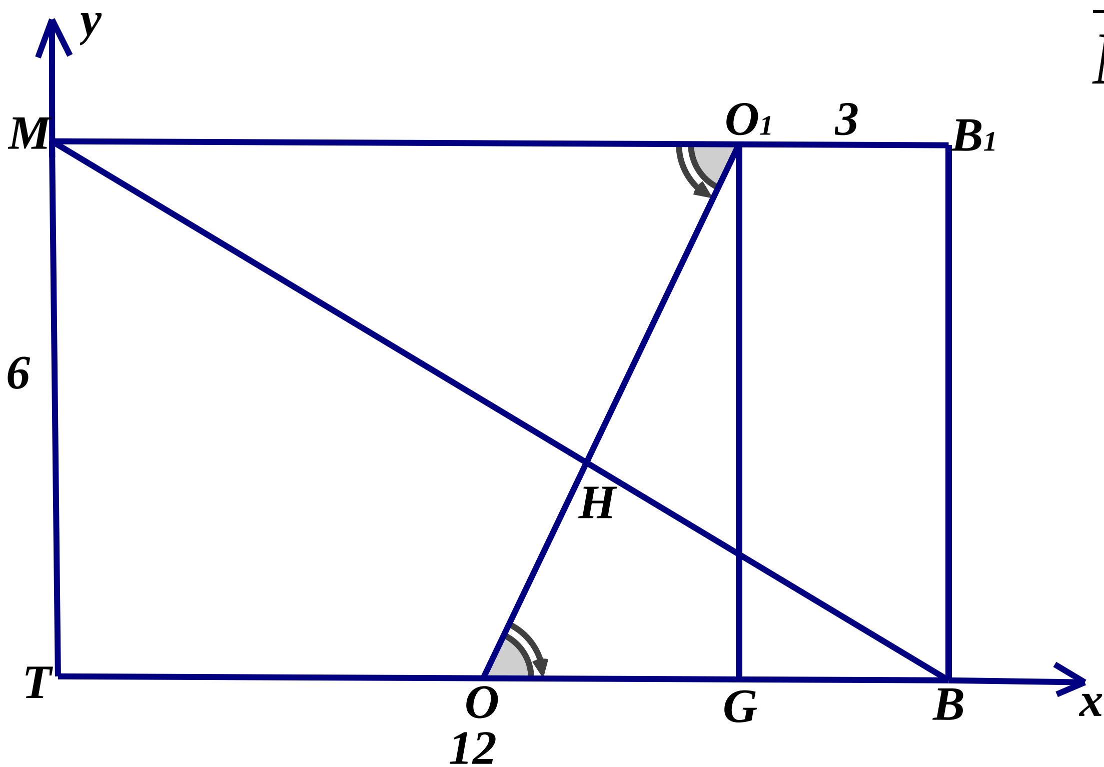


$MB \perp KN$, $MB \perp OO_1$?

Доказательство MB $\perp$ OO1

Способ 1

Введём систему координат и найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{OO_1}$. M(0;6), B(12;0), $\overrightarrow{MB}\{12;-6\}$;
O(6;0), $O_1(9;6)$ $\overrightarrow{OO_1}\{3;6\}$.

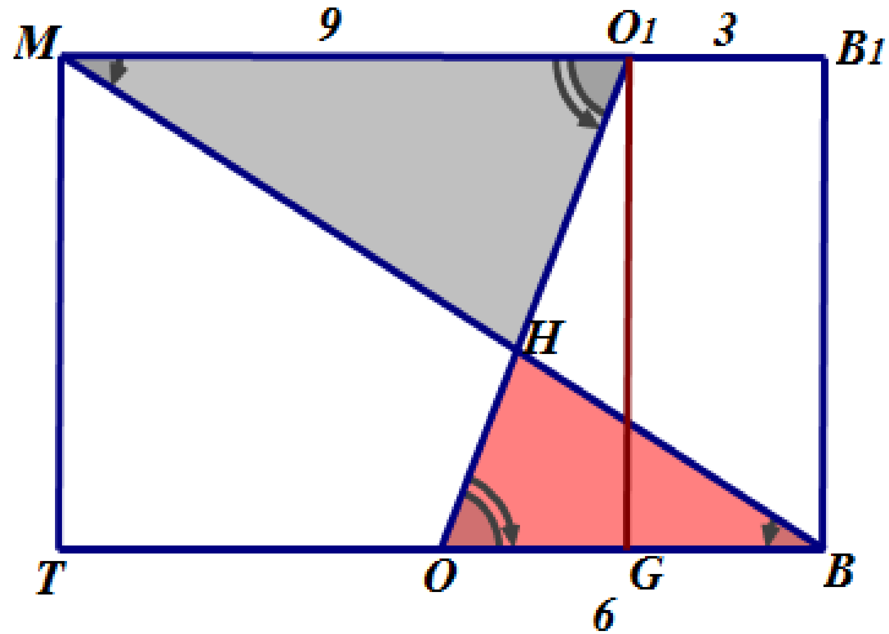


$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{OO_1} = 12\cdot 3+(-6)\cdot 6=0.$$

Способ 2

Покажем, что ΔOHB прямоугольный, т.е. выполняется равенство

$$OH^2+BH^2=OB^2$$



$BM^2 = BT^2 + MT^2$ BM=$6\sqrt{5}$,

$\Delta MHO_1 \sim \Delta BHO$ по двум углам.

$$\frac{MH}{HB}=\frac{MO_1}{OB}=\frac{HO_1}{HO}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$HB=\frac{2}{5}MB=2{,}4\sqrt{5}$$

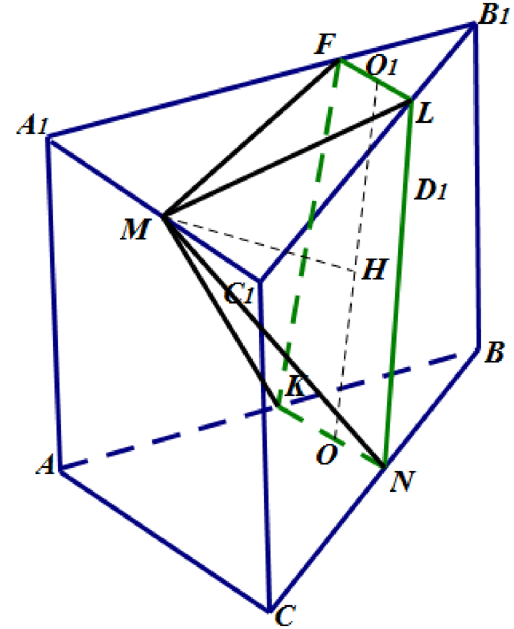
$$OH=\frac{2}{5}OO_1=\frac{2}{5}\sqrt{O_1G^2+OG^2}=\frac{2}{5}\sqrt{36+9}=\frac{6}{5}\sqrt{5}=1{,}2\sqrt{5}$$

$$OH^2+HB^2=5(2{,}4^2+1{,}2^2)=5\cdot1{,}2^2(2^2+1^2)=25\cdot1{,}44=\frac{144}{4}=36=OB^2$$

$$MH=MB-BH=3{,}6\sqrt{5}$$

3. Найдем объем пирамиды MFLNK

MH –высота пирамиды MFLNK.



Площадь равнобедренной трапеции $KNLF$ с основаниями KN и LF и высотой OO_1 равна $\dfrac{KN+LF}{2}\cdot OO_1$. KN — средняя линия треугольника ABC, $KN=\dfrac{1}{2}AB=4\sqrt{3}$.

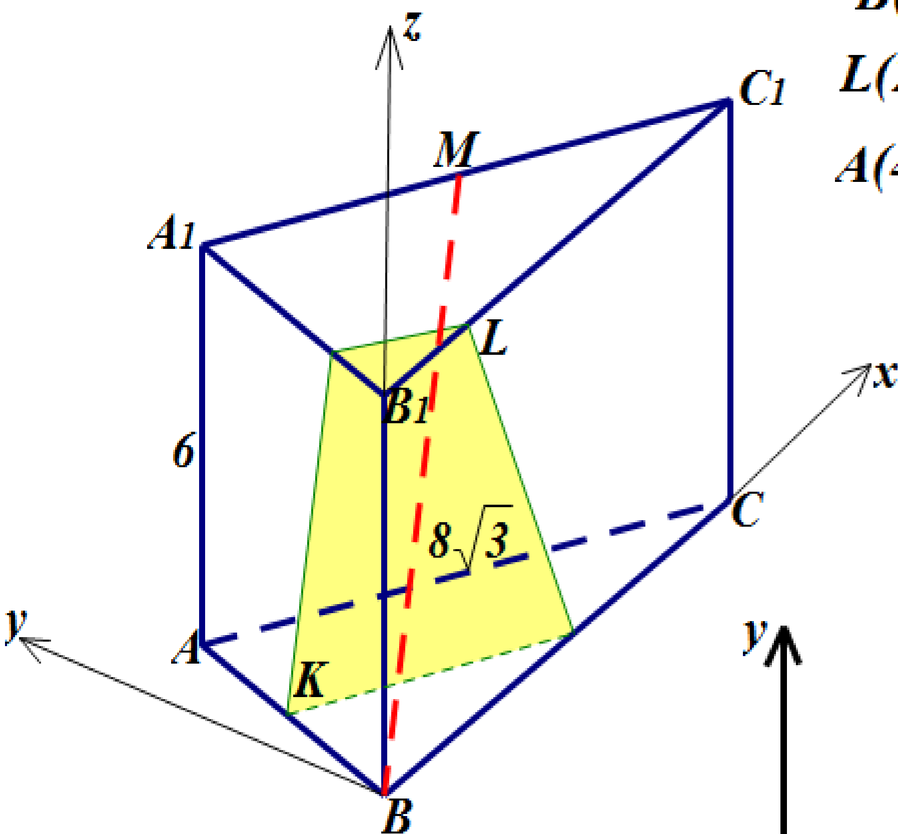
LF — сторона правильного треугольника LB_1F ($LF \parallel A_1C_1$), поэтому $LF=LB_1=2\sqrt{3}$.

$$S_{KNLF}=\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}\cdot 3\sqrt{5}=9\sqrt{15}.$$

$$V_{MKNLF}=\frac{1}{3}S_{KNLF}\cdot MH=\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{15}\cdot\frac{18\sqrt{5}}{5}=54\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $54\sqrt{3}$.

Решим задачу методом координат

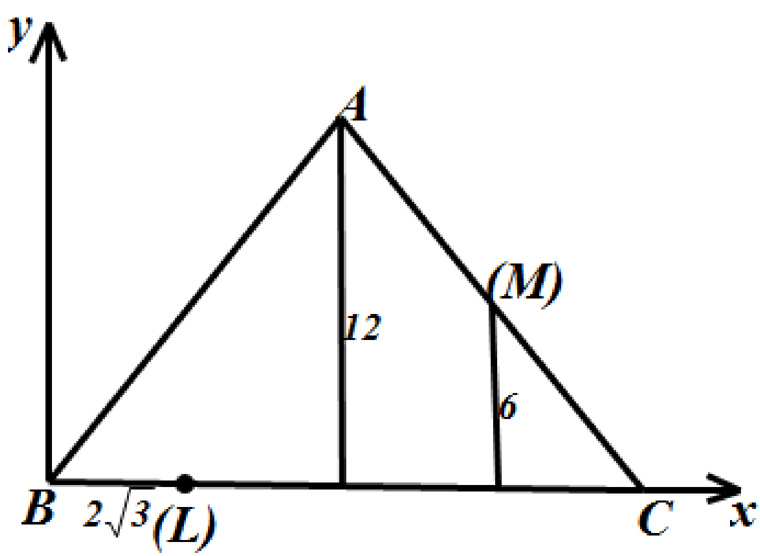


$B(0;0;0)$; $M(6\sqrt{3};6;6)$ $\overrightarrow{BM}\{6\sqrt{3};6;6\}$

$L(2\sqrt{3};0;6)$; $K(2\sqrt{3};6;0)$ $\overrightarrow{LK}\{0;6;-6\}$

$A(4\sqrt{3};12;0)$; $C(8\sqrt{3};0;0)$ $\overrightarrow{AC}\{4\sqrt{3};-12;0\}$

$$\overrightarrow{BM} \perp \gamma \iff \begin{cases} \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0, \\ \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{LK}=0 \end{cases}$$



$$\rho(M,\gamma)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$ax+by+cz+d=0$ – уравнение плоскости γ,

$(x_0;y_0;z_0)$ = $M(6\sqrt{3};6;6)$

$N(4\sqrt{3};0;0)$ $\quad a\cdot 4\sqrt{3}+0\cdot b+c\cdot 0+d=0$

$$a=-\frac{d}{4\sqrt{3}}$$

$K(2\sqrt{3};6;0)$ $\quad a\cdot 2\sqrt{3}+6\cdot b+c\cdot 0+d=0$

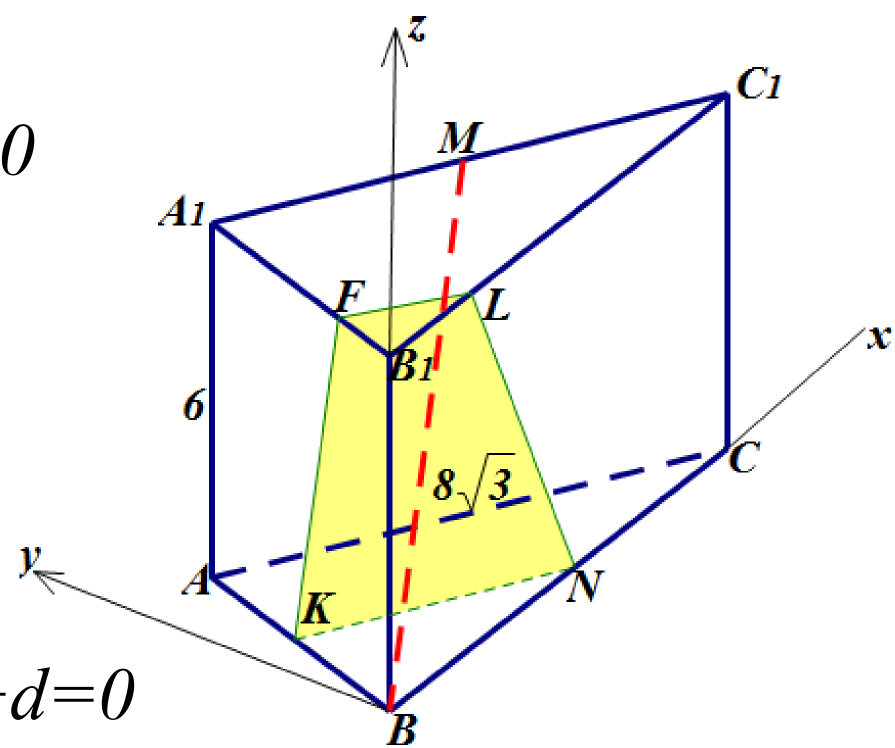
$$b=-\frac{d}{12}$$

$L(2\sqrt{3};0;6)$ $\quad a\cdot 2\sqrt{3}+b\cdot 0+c\cdot 6+d=0$

$$c=-\frac{d}{12}$$

$$3x+\sqrt{3}y+\sqrt{3}z-12\sqrt{3}=0$$

$$\rho(M,\gamma)=\frac{3\cdot 6\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 6+\sqrt{3}\cdot 6-12\sqrt{3}}{\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{18\sqrt{5}}{5}$$

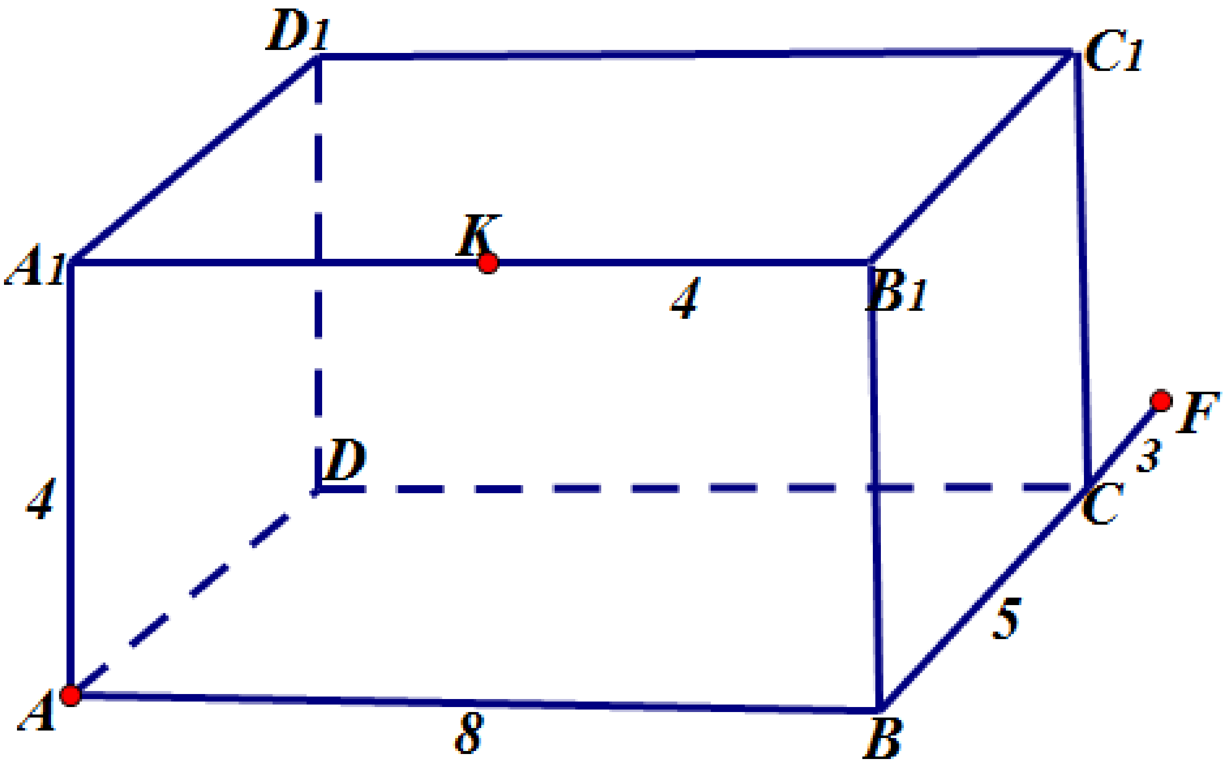


Задача.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны оснований AB и BC равны соответственно 8 и 5, боковое ребро AA_1 равно 4. На ребре A_1B_1 отмечена точка K, а на луче BC – точка F, причем $A_1K=KB_1$ и $BF=AB$. Плоскость AKF пересекает ребро B_1C_1 в точке P.

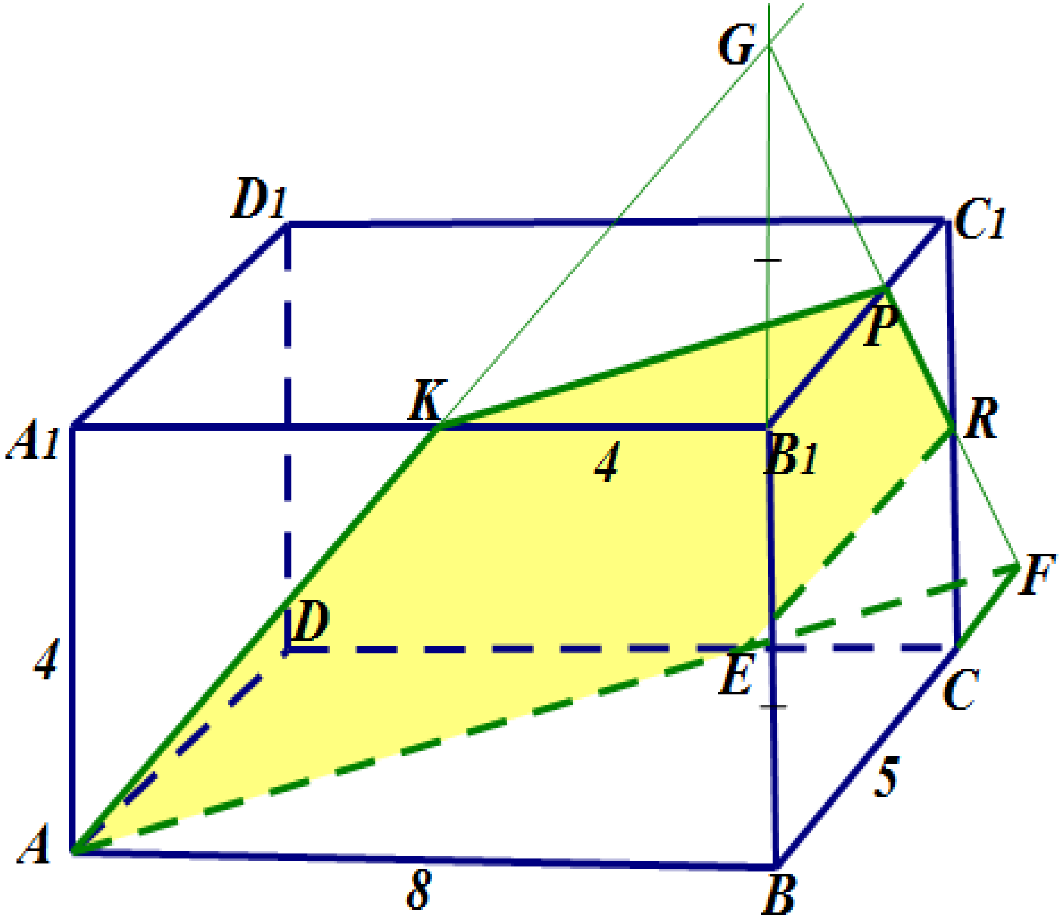
а) Докажите, что $B_1P:PC_1=4:1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью AKF.


D1
C1
K
A1
B1
4
F
3
D
4
C
5
A
8
B

а) $\Delta GB_1P \sim \Delta GBF$

$$\frac{BF}{B_1P} = \frac{2}{1}$$

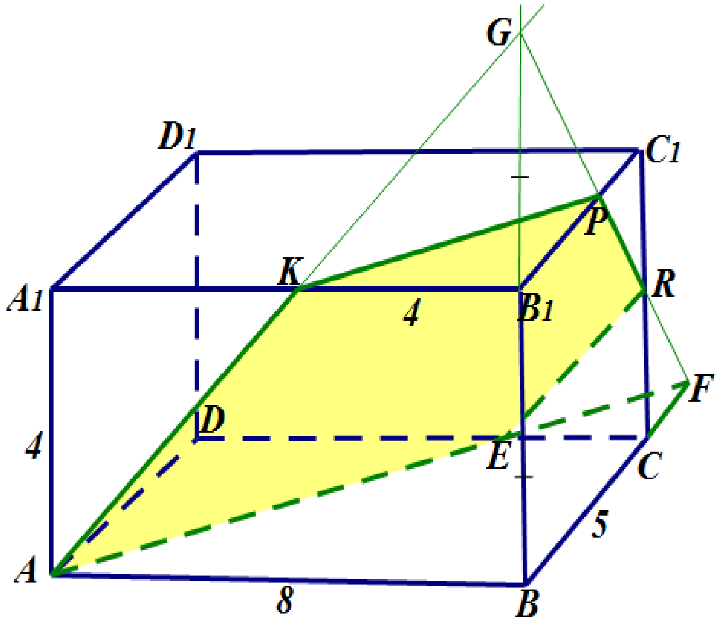


$B_1P = 4 \quad B_1C_1 = 5$

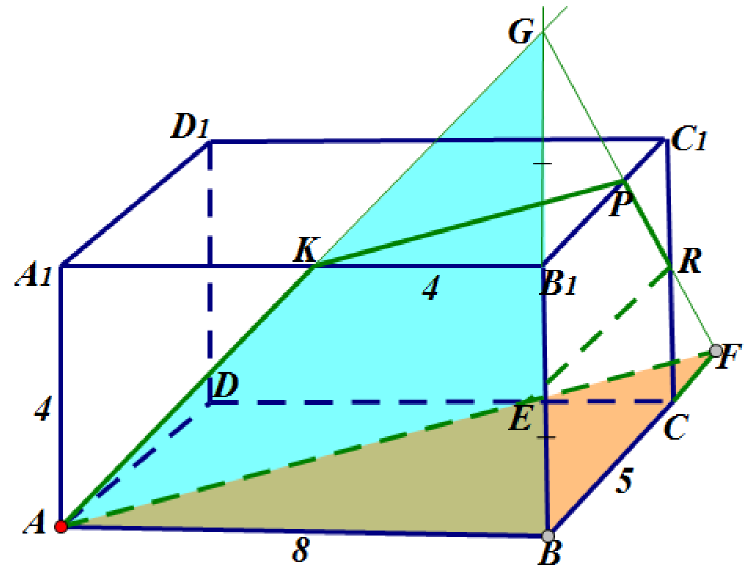
$PC_1 = 1$

$B_1P : PC_1 = 4:1$

б)



$$S_{AKPRE} = S_{AGF} - S_{KGP} - S_{EFR}$$



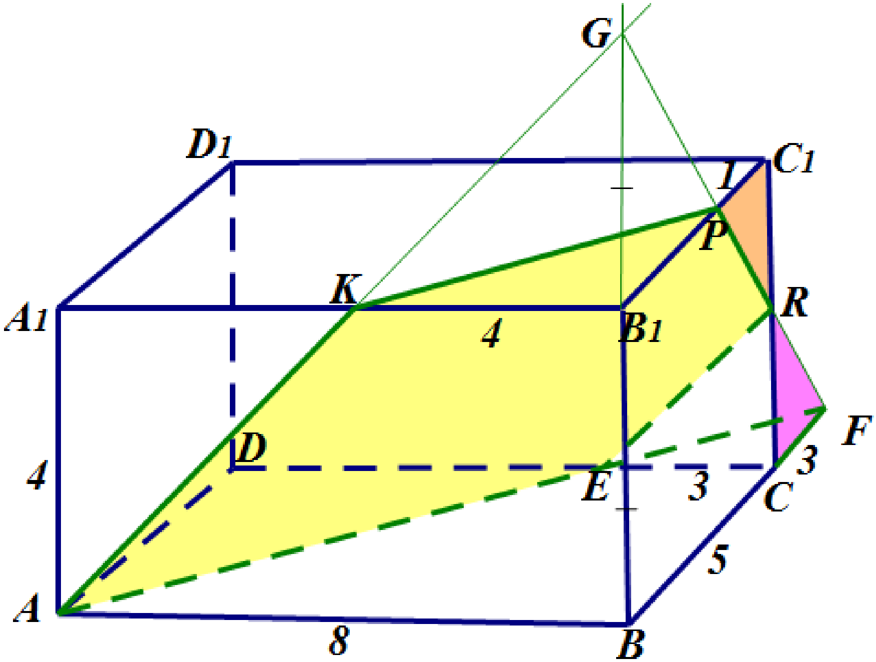
$$\Delta AGF : AG = GF = AF = 8\sqrt{2}$$

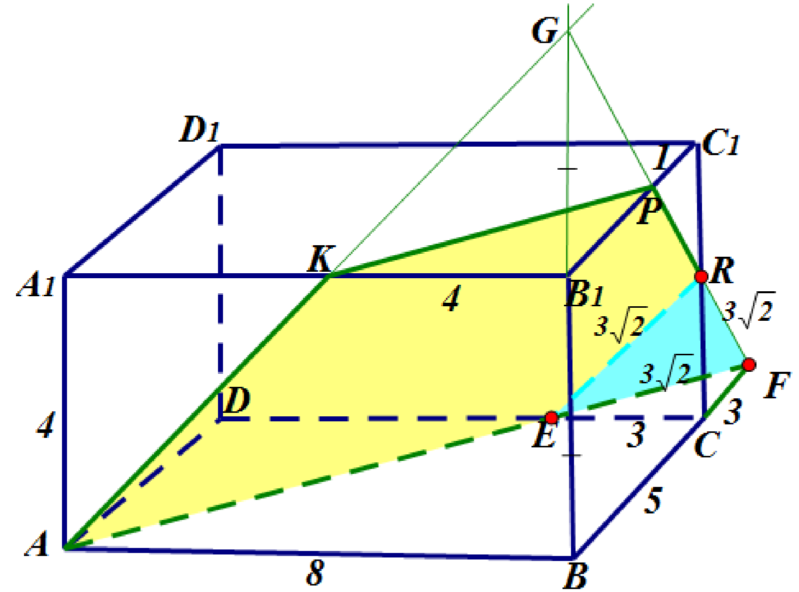
$$\Delta KGP : KP = GP = GK = 4\sqrt{2}$$

$$\Delta AGB = \Delta AFB = \Delta BGF$$

$$S_{AFG} = \frac{\left(8\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}$$

$$S_{KGP} = 8\sqrt{3}$$





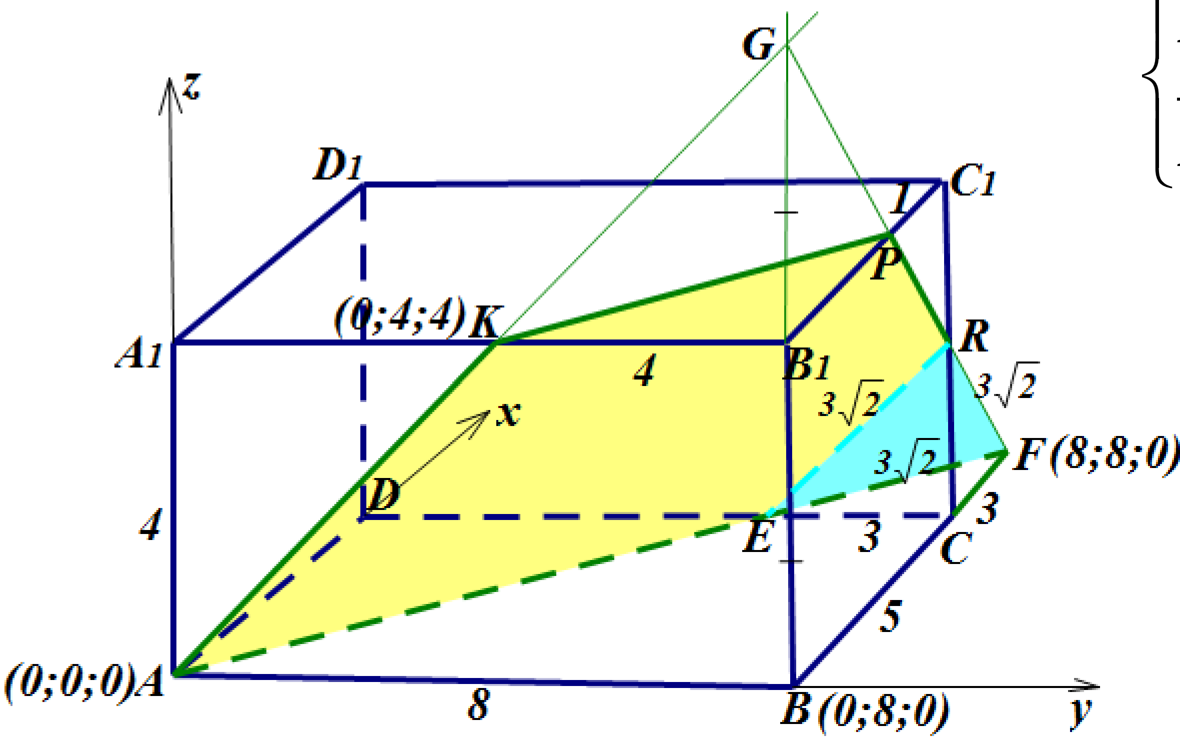
$$S_{ERF} = \frac{(3\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{AKPRE} = 32\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{39\sqrt{3}}{2}$$

Ответ. $\frac{39\sqrt{3}}{2}$

Найти расстояние от точки B до плоскости сечения.

$$\rho = \frac{|ax_0 + bx_0 + cx_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad ax + by + cz + d = 0 \quad M_0(x_0; y_0; z_0)$$



$$\begin{cases} \overrightarrow{AK} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AF} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y + 4z = 0 \\ 8x + 8y = 0 \end{cases}$$

$$z = -y,$$

$$x = -y$$

$$\vec{n}(1; -1; 1)$$

$$x - y + z = 0$$

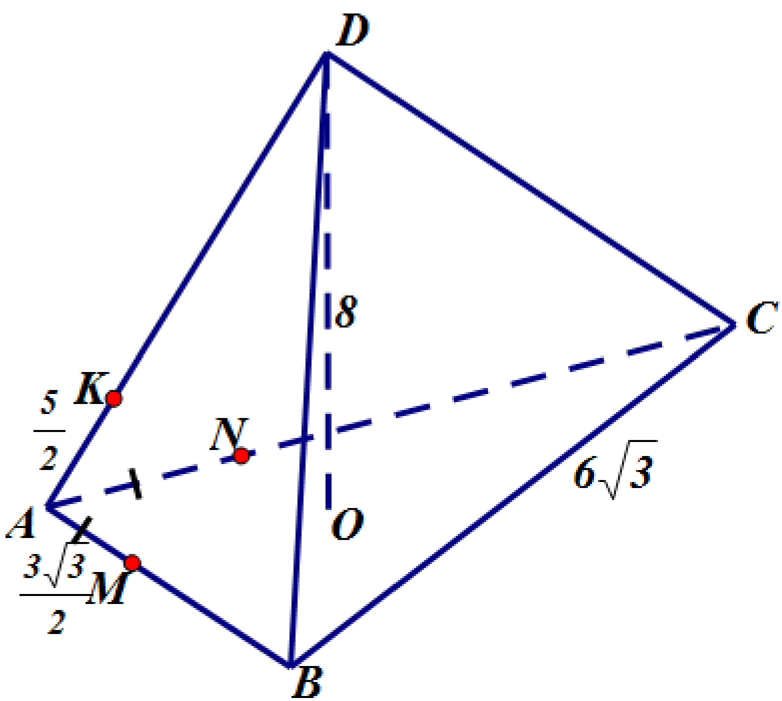
$\overrightarrow{AF}(8;8;0)$

$\overrightarrow{AK}(0;4;4)$ $\quad \vec{n}(x;y;z)$

$$\rho = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 8 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{0^2 + 8^2 + 0^2}} = 1$$

Задача

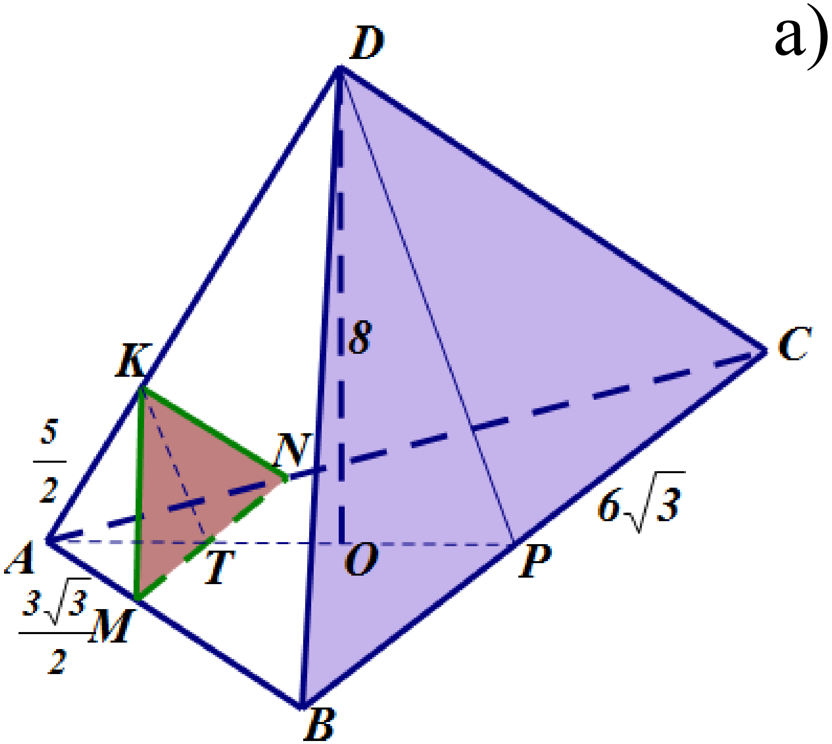
В правильной треугольной пирамиде DABC основание ABC AB= $6\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна 8. На ребрах AB, AC и AD соответственно отмечены точки M, N и K такие, что AM=AN= $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и AK= $\frac{5}{2}$.



а) Докажите, что плоскости MNK и DBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости DBC.

Решение.



а) $MNK \| DBC \Longleftrightarrow BC \| MN,\ KM \| BD$

$\Delta ABC \sim \Delta AMN$: $\underline{BC \| MN}$

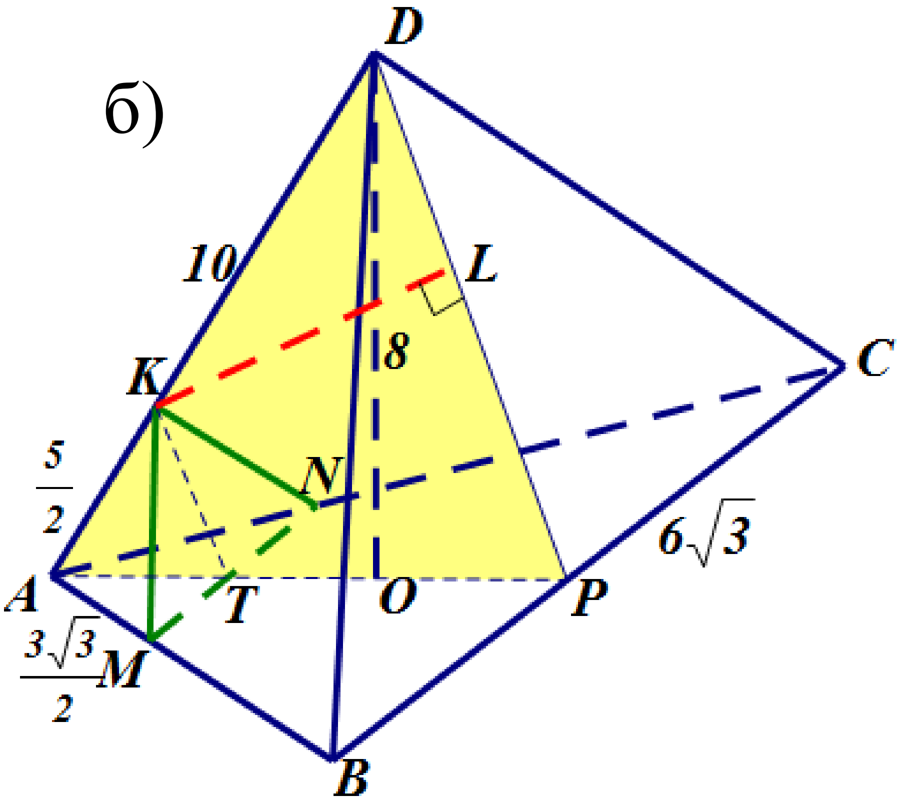
$AO = \frac{2}{3} AP = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6$ $\qquad AD = 10$

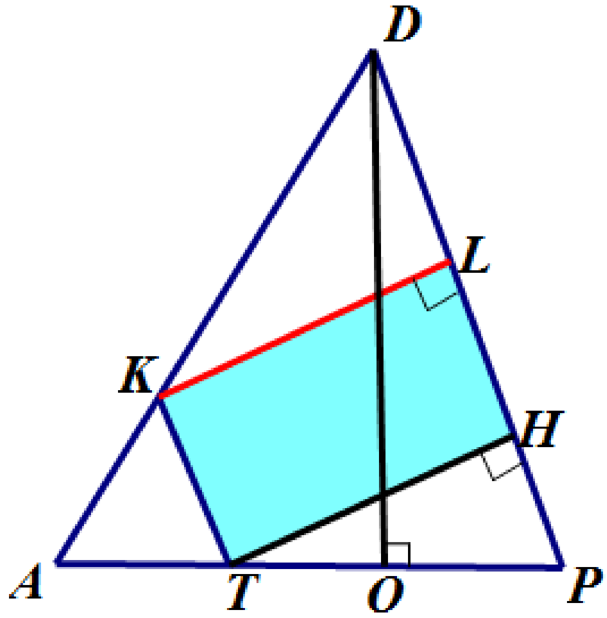
$\Delta ABD \sim \Delta AMK$: $\frac{AK}{AD} = \frac{5}{2} : 10 = 1:4$

$\frac{AM}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{2} : 6\sqrt{3} = 1:4$, $\angle A$ - общий

$\Longrightarrow \angle AMK = \angle ABD \Longrightarrow \underline{KM \| BD}$

б)





$KL = TH$

$TH = TP \sin\angle P$

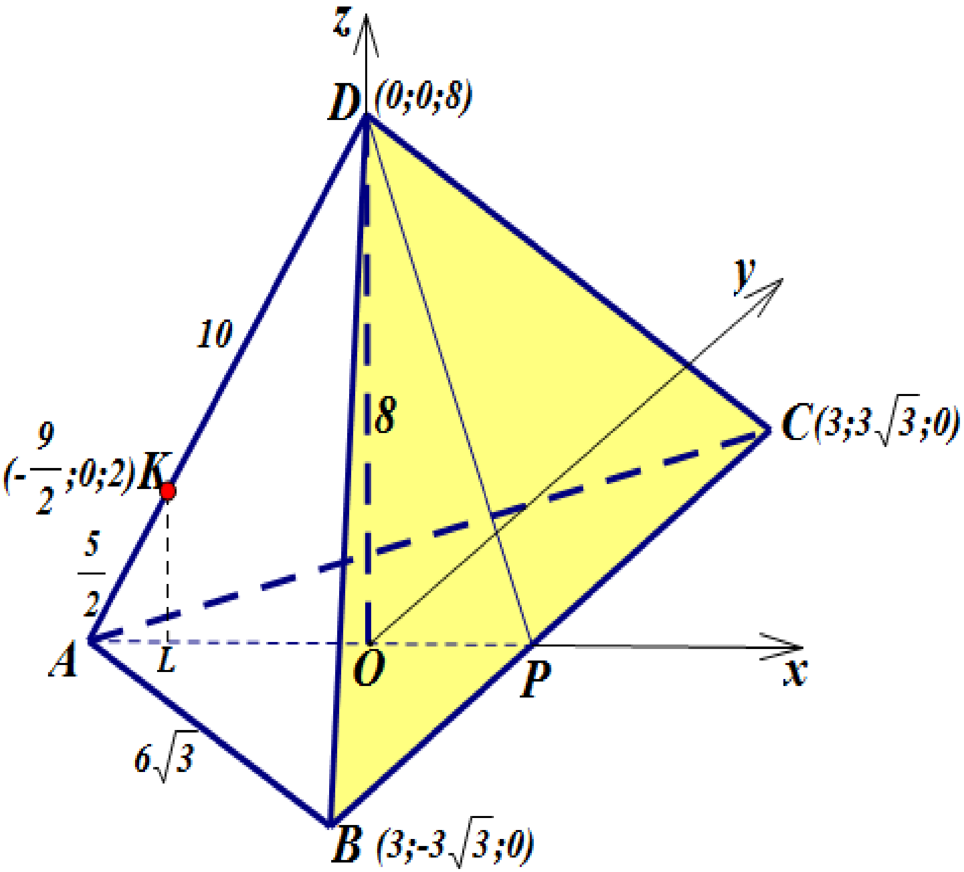
$TP = AP - AT = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$

$\sin\angle P = \frac{DO}{DP} = \frac{8}{\sqrt{73}}$

$TH = \frac{27}{4} \cdot \frac{8}{\sqrt{73}} = \frac{54}{\sqrt{73}}$

Ответ. $KL = \frac{54}{\sqrt{73}}$

Решим задачу методом координат



$$\rho(K,BCD)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$K(x_0;y_0;z_0)$$

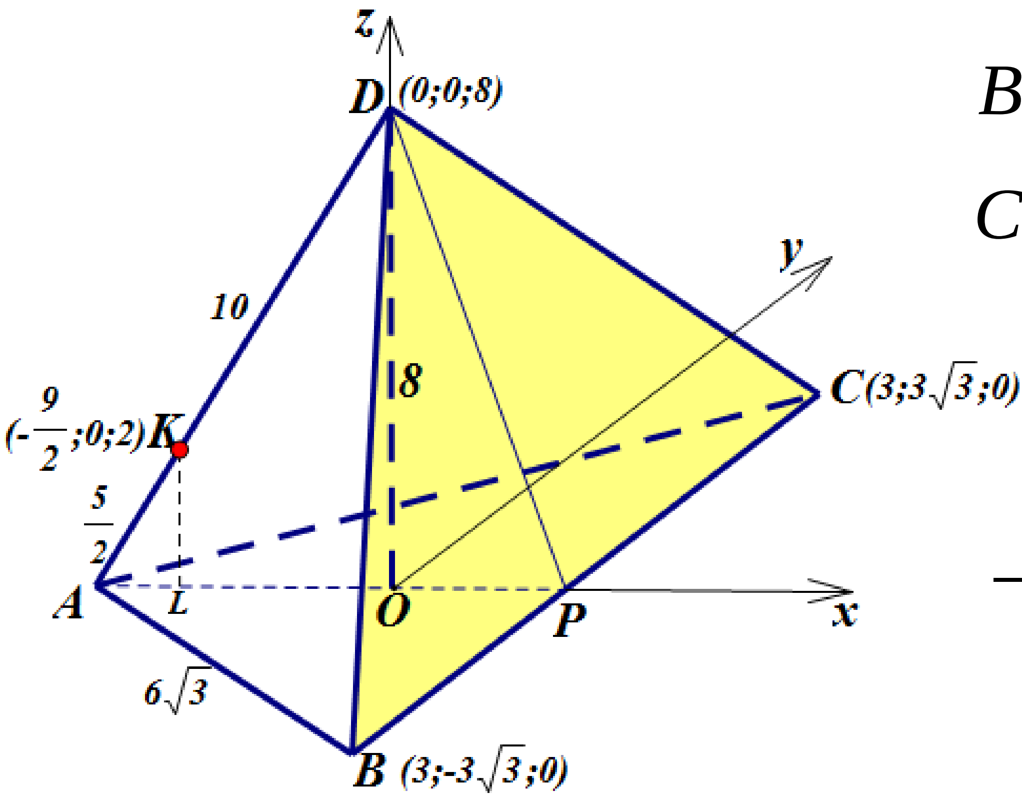
$$BCD: ax+by+cz+d=0$$

$$AP=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=9$$

$$AO=6$$

$$\frac{8}{KL}=\frac{AD}{AK}=\frac{10\cdot 2}{5}=4 \qquad KL=2$$

$$\frac{AL}{AO}=\frac{AL}{6}=\frac{1}{4} \qquad AL=\frac{3}{2}$$



$$D: 0\cdot a + 0\cdot b + 8\cdot c + d = 0$$

$$B: 3\cdot a - 3\sqrt{3}\cdot b + 0\cdot c + d = 0$$

$$C: 3\cdot a + 3\sqrt{3}\cdot b + 0\cdot c + d = 0$$

$$c = -\frac{d}{8} \qquad b = 0 \qquad a = -\frac{d}{3}$$

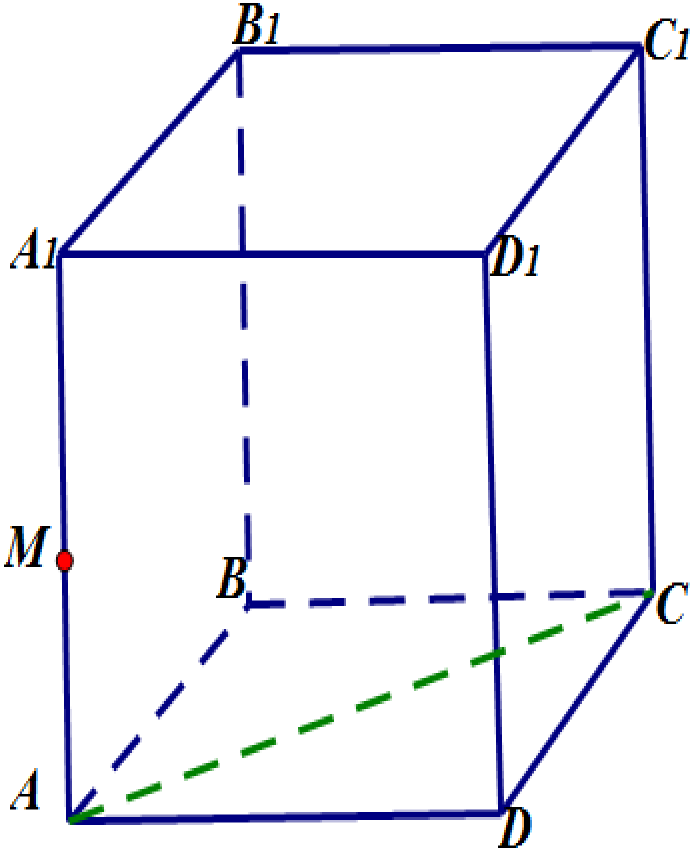
$$-\frac{d}{3}x + 0\cdot y - \frac{d}{8}z + d = 0$$

$$8x + 3z - 24 = 0$$

$$\rho(K, BCD) = \frac{\left|8\cdot\left(-\frac{9}{2}\right) + 2\cdot 3 - 24\right|}{\sqrt{64+9}} = \frac{54}{\sqrt{73}}$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН www.legionr.ru

Задача

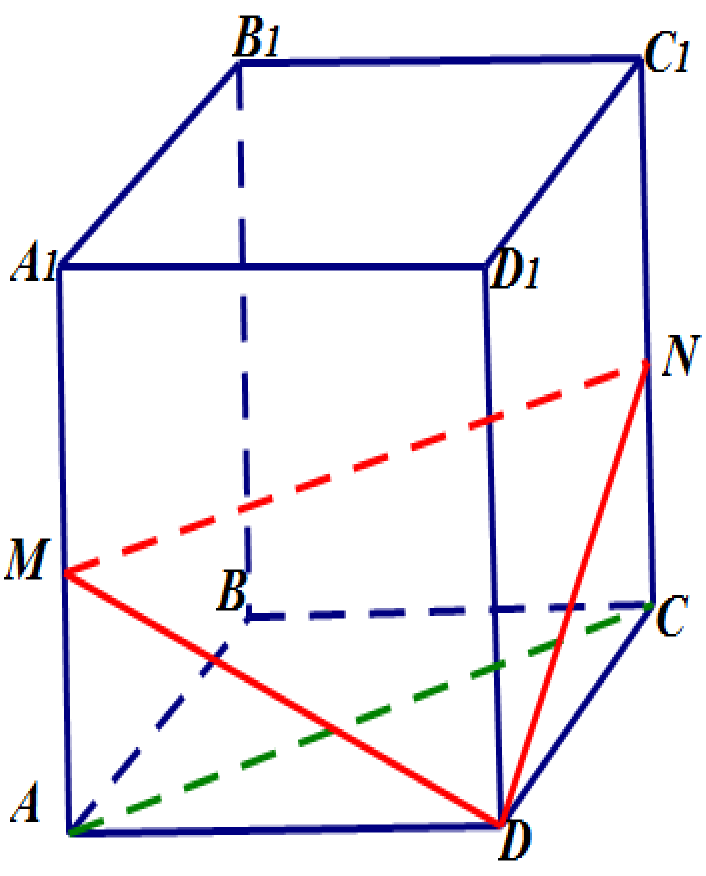


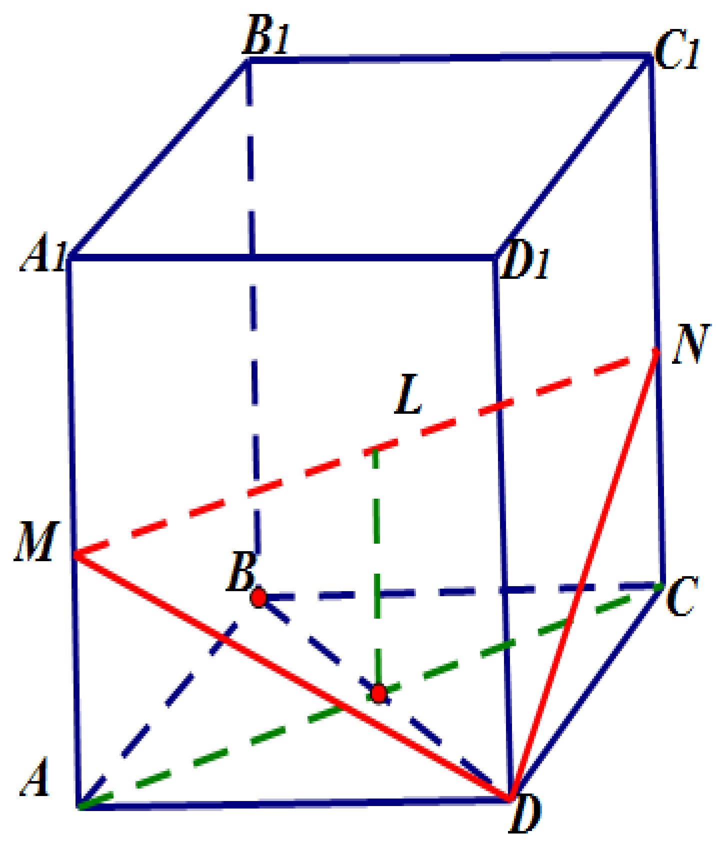
В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM:MA_1 = 2:3$.

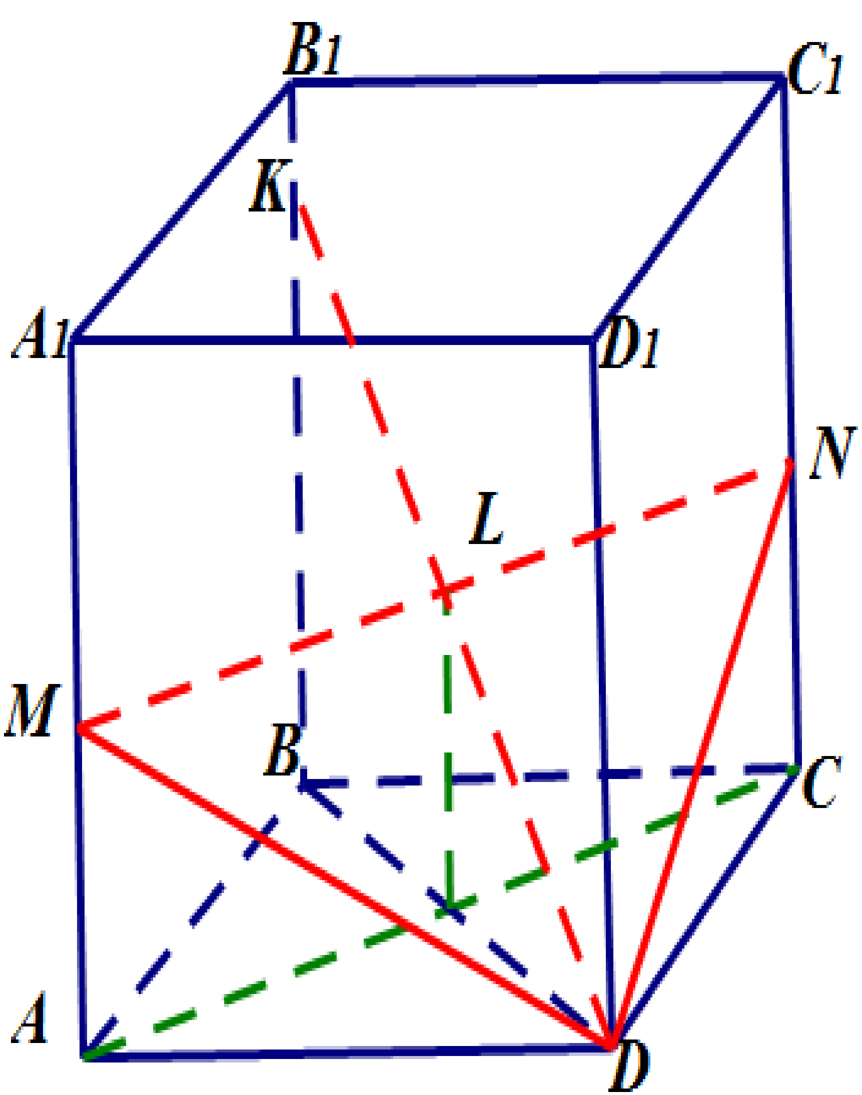
а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки D и M параллельно диагонали AC.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, если $AA_1 = 5\sqrt{6}$, AB=4.

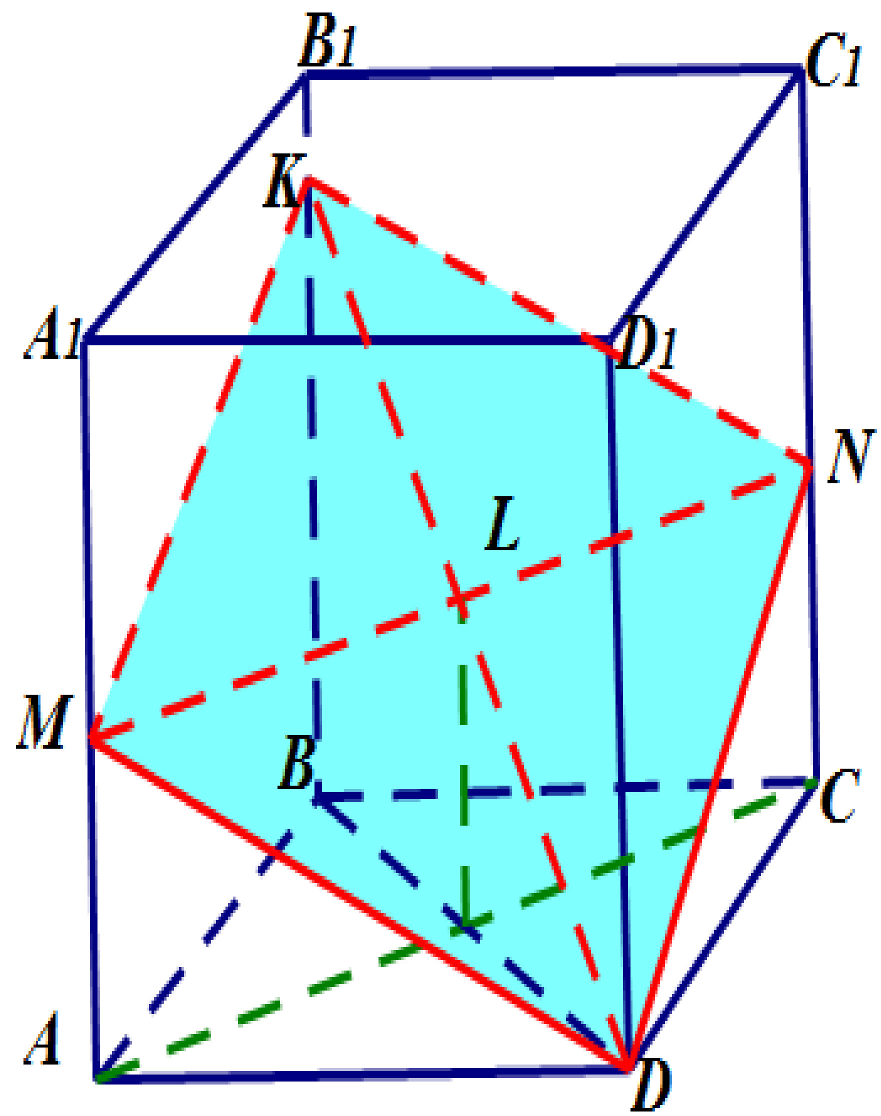
Решение.



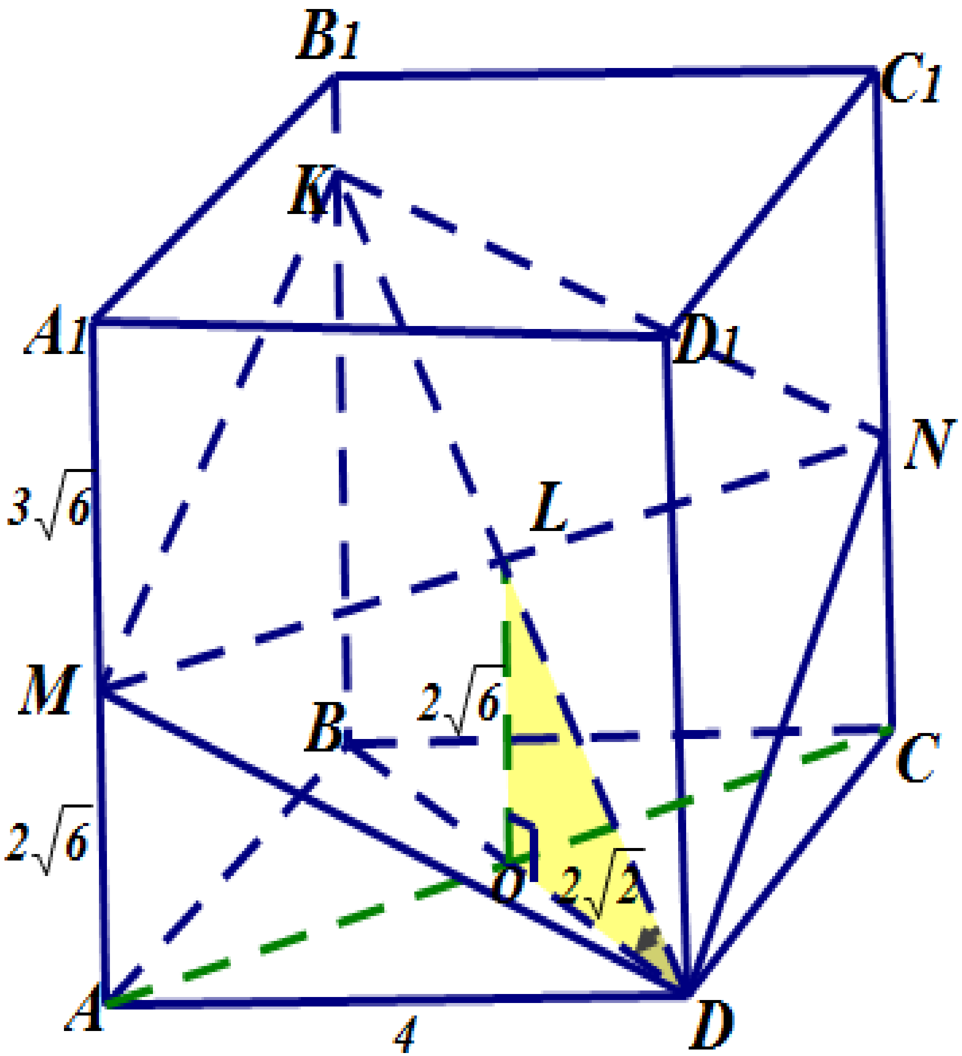




B1
C1
K
A1
D1
N
L
M
B
C
A
D

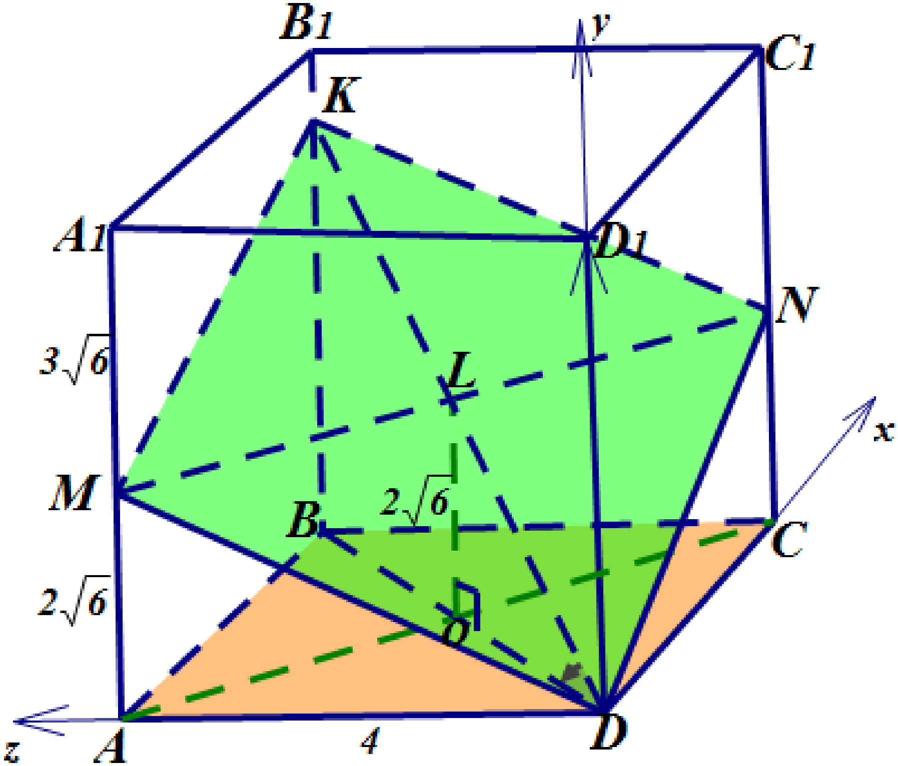


B1
C1
K
A1
D1
N
L
M
B
C
A
D

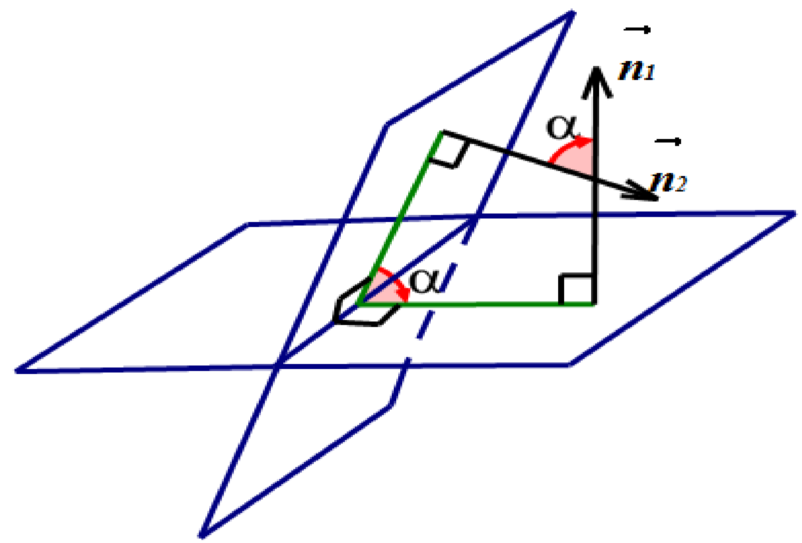


$$tg\angle ODL=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3},\ \angle ODL=60°$$

Решим задачу методом координат



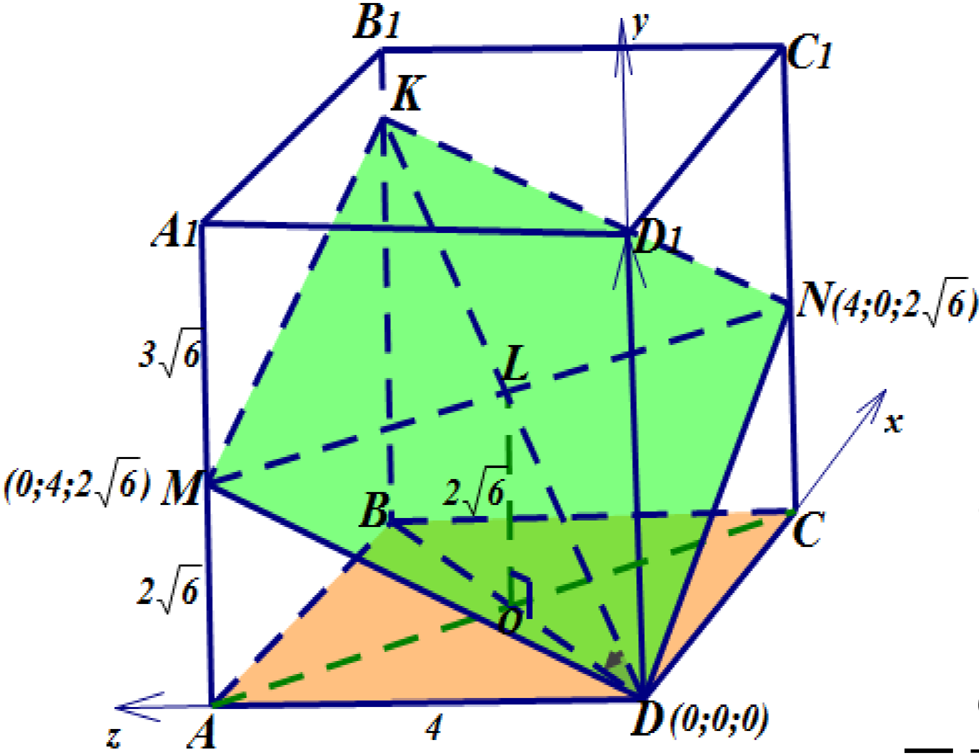
$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{n_1 \cdot n_2}$$



$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{DD_1}\{0;0;5\sqrt{6}\}$

$\overrightarrow{n_2}\{a;b;c\}$

$ax + by + cz + d = 0$ - уравнение плоскости сечения DMN



$$D: 0\cdot a + 0\cdot b + 0\cdot c + d = 0$$

$$M: 0\cdot a + 4\cdot b + 2\sqrt{6}\cdot c + d = 0$$

$$N: 4\cdot a + 0\cdot b + 2\sqrt{6}\cdot c + d = 0$$

$$d = 0 \quad b = -\frac{c\sqrt{6}}{2} \quad a = -\frac{c\sqrt{6}}{2}$$

$$-\frac{c\sqrt{6}}{2}x - \frac{c\sqrt{6}}{2}y + cz = 0$$

$$6x + 6y - 2\sqrt{6}\cdot z = 0$$

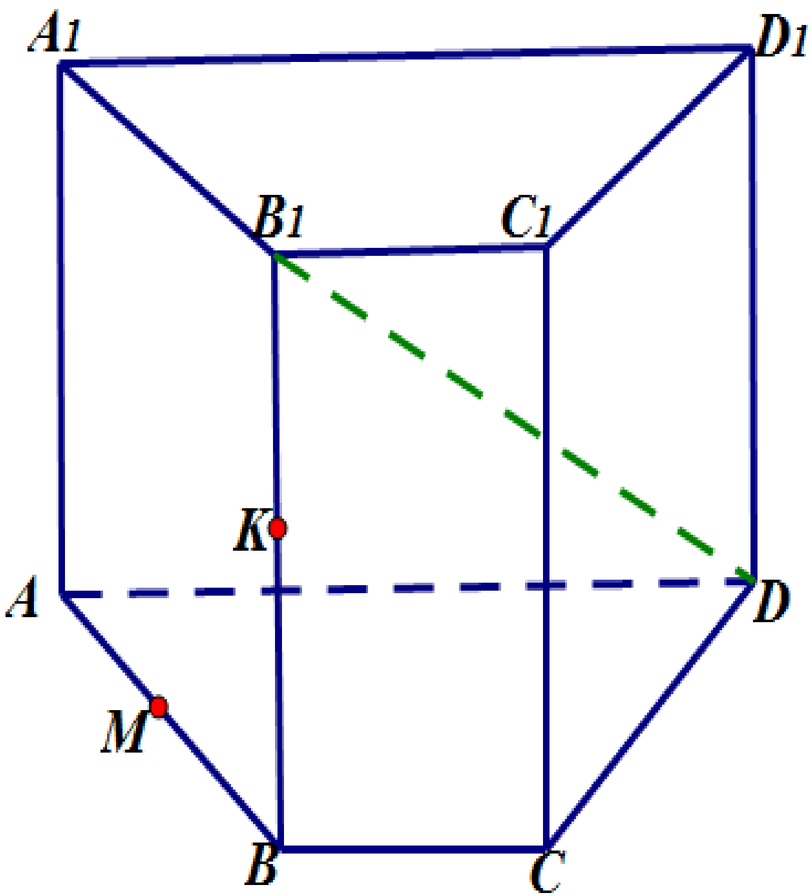
$$\overrightarrow{n_2}\{3;3;-\sqrt{6}\}$$

$$\overrightarrow{n_1}\{0;0;5\sqrt{6}\}$$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{n_1\cdot n_2} = \frac{|3\cdot 0 + 3\cdot 0 - 30|}{5\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}} = \frac{30}{5\cdot 6\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^0$$

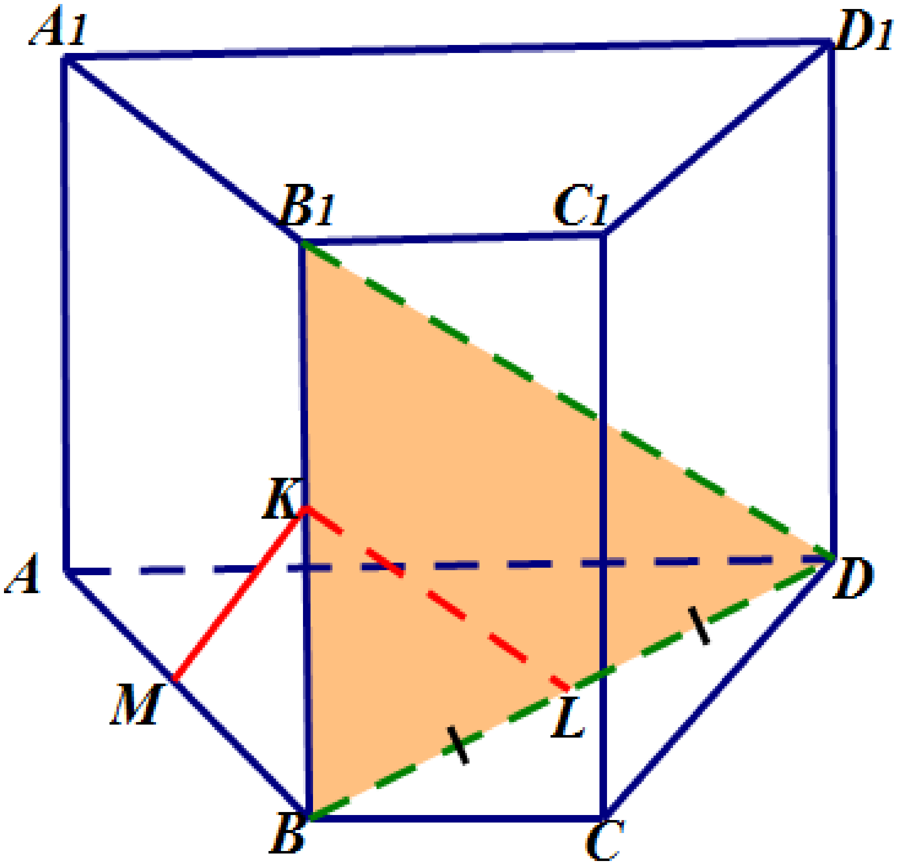
Задача

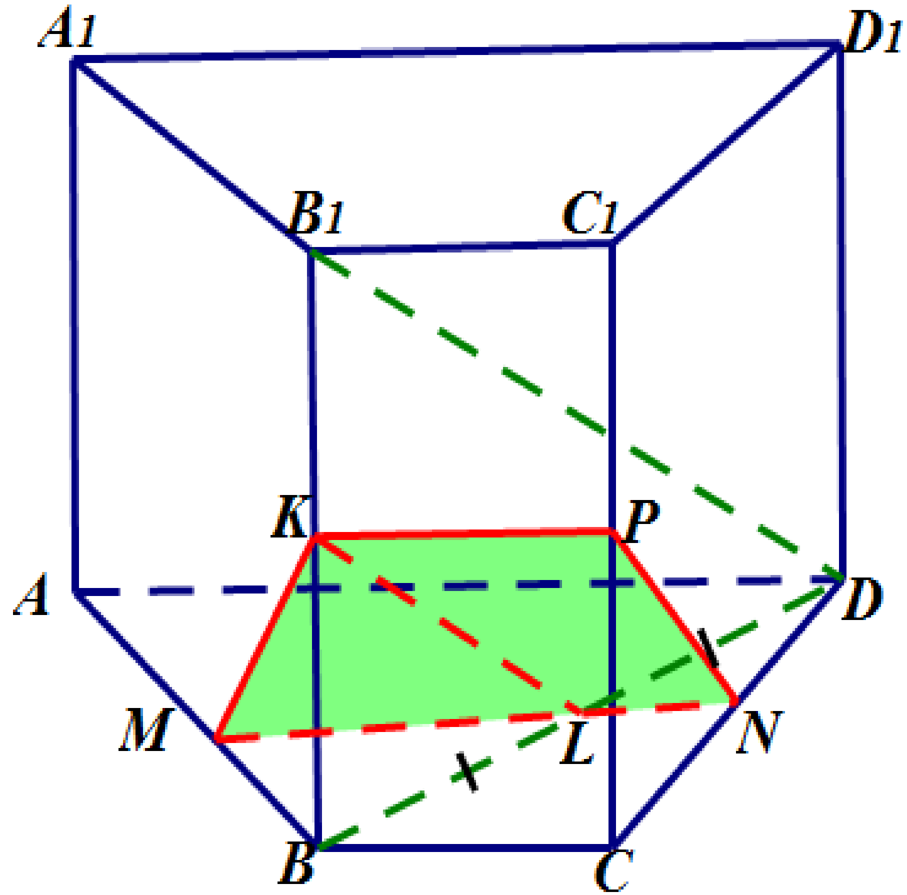


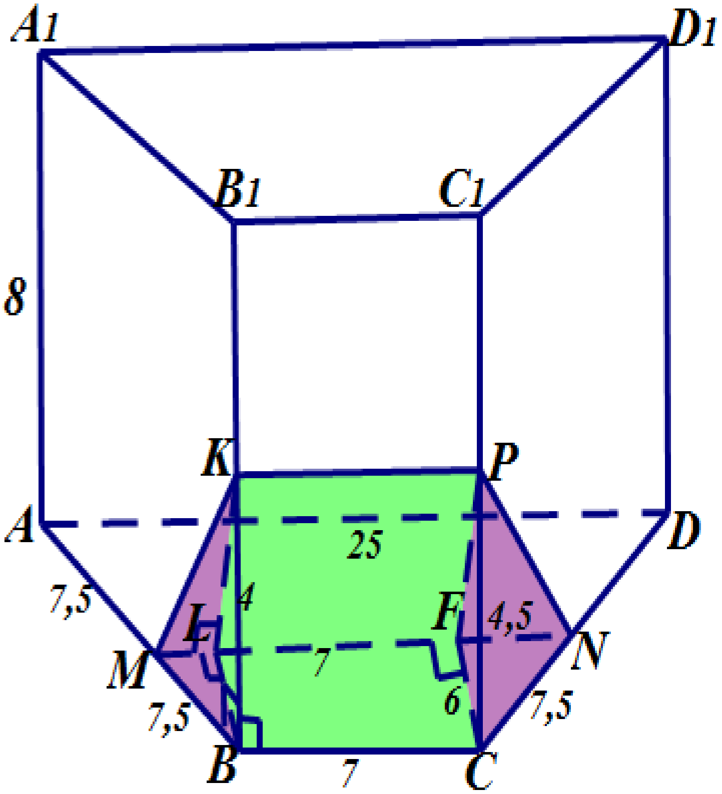
В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Точка K- середина ребра BB_1. Плоскость α проходит через середины ребер AB и BB_1 параллельно прямой B_1D.

а) Докажите, что сечением призмы плоскостью α является равнобедренная трапеция;

б) Найдите объем большей части призмы, на которые ее разбивает плоскость α, если известно, что $AB=15$, $BB_1=8$, $BC=7$, $AD=25$.


A1
D1
B1
C1
K
A
D
M
L
B
C


A1
D1
B1
C1
K
P
A
D
M
L
N
B
C



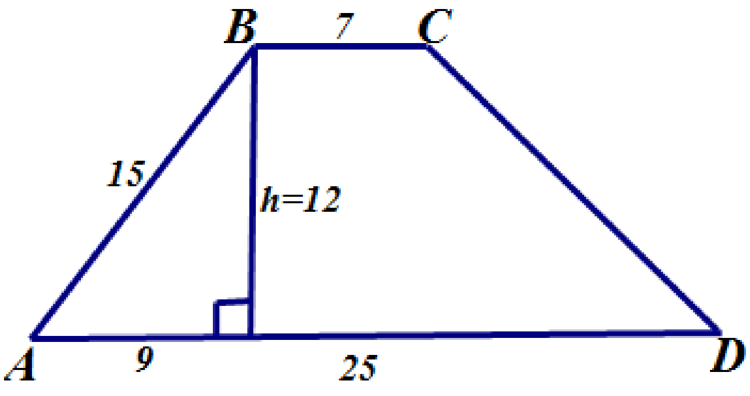
$$V_{призмы} = S_{ABCD} \cdot AA_1$$

$$V_{призмы} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h \cdot AA_1 = \frac{25+7}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 1536$$

$$V_{PFCN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} CF \cdot FN \cdot PC = \frac{4 \cdot 6 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 18$$

$$V_{PCFN} = V_{KBML}$$

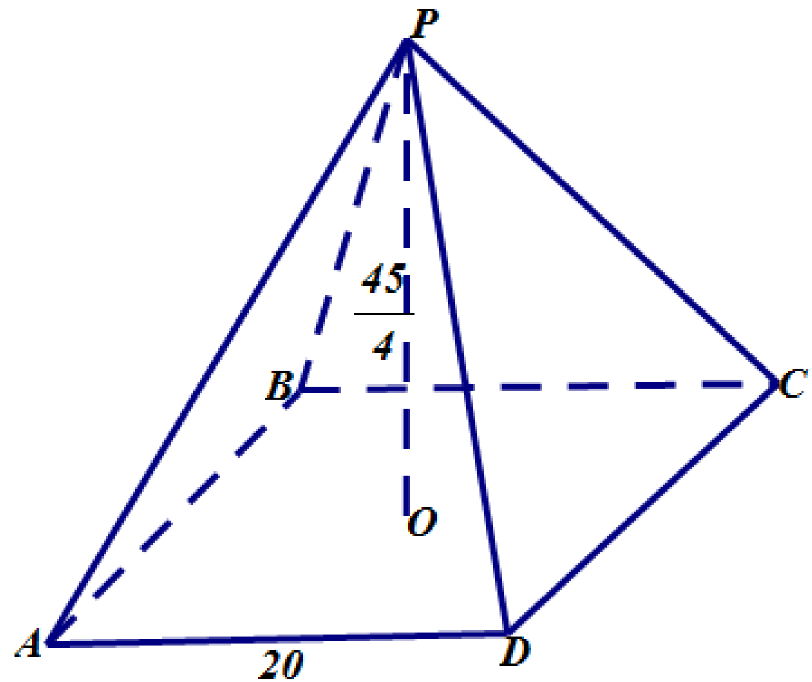
$$V_{KBMLPFC} = S_{BLFC} \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 7 = 84$$



$$V = 1536 - 84 - 36 = 1416$$

Ответ. 1416

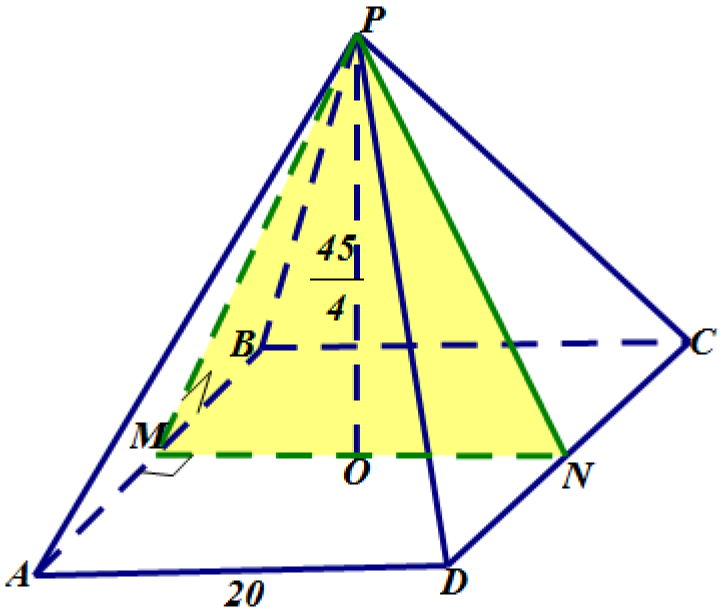
Задача

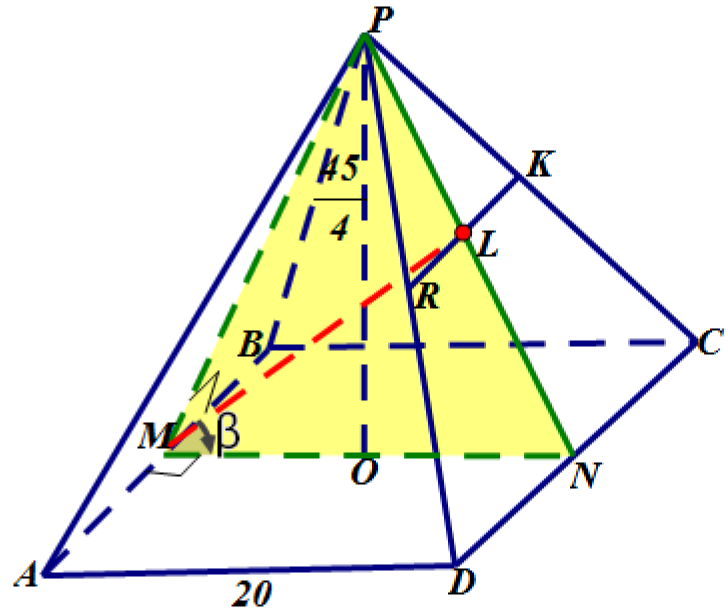


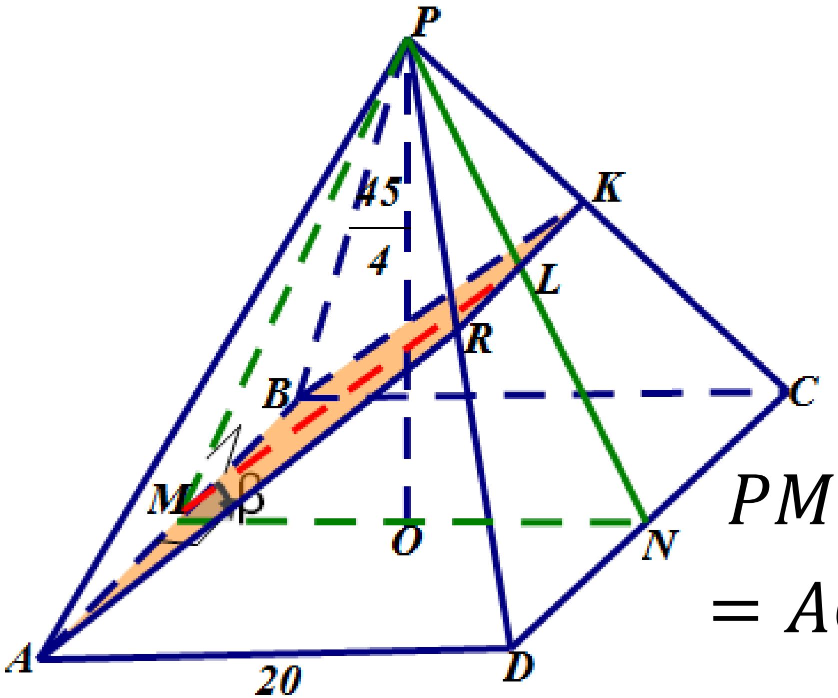
В правильной четырехугольной пирамиде PABCD сторона основания равна 20, а высота пирамиды равна 11,25. Через ребро AB под углом β к плоскости ABC проведена плоскость α. Известно, что $tg\beta = \frac{3}{4}$.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро PC в отношении 1:4, считая от точки P.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.







$$\Delta PKL \sim \Delta PNC \ (KL \| NC)$$

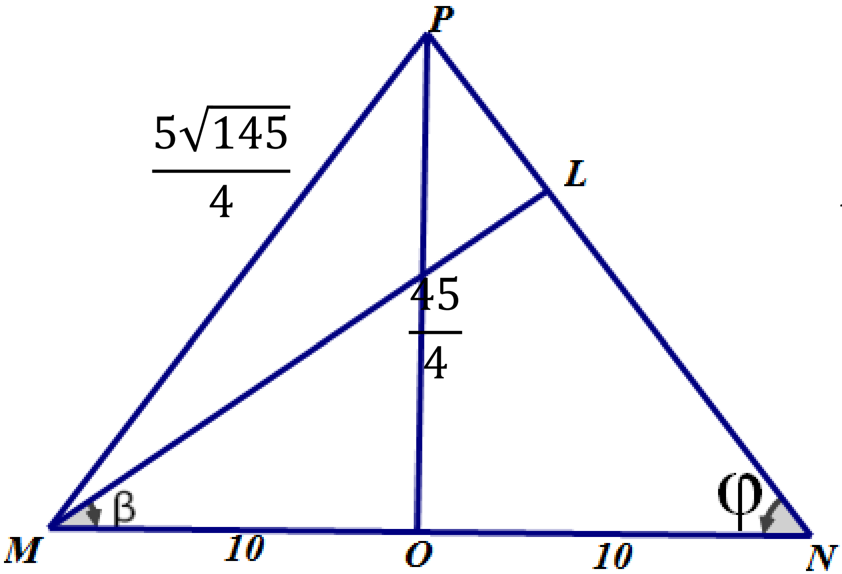
$$\frac{PK}{PC} = \frac{PL}{PN}$$

$$\frac{PK}{KC} = 1:4\,? \ \Leftrightarrow \ \frac{PL}{LN} = 1:4\,?$$

$$PM^2 = AP^2 - AM^2 =$$

$$= AO^2 + PO^2 - AM^2 = 100 + \frac{2025}{16} = \frac{3625}{16}$$

PM=PN



$\underline{\Delta MNL}$

$$\frac{LN}{sin\beta} = \frac{MN}{\sin(\varphi + \beta)}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{3}{5}, cos\beta = \frac{4}{5}$$

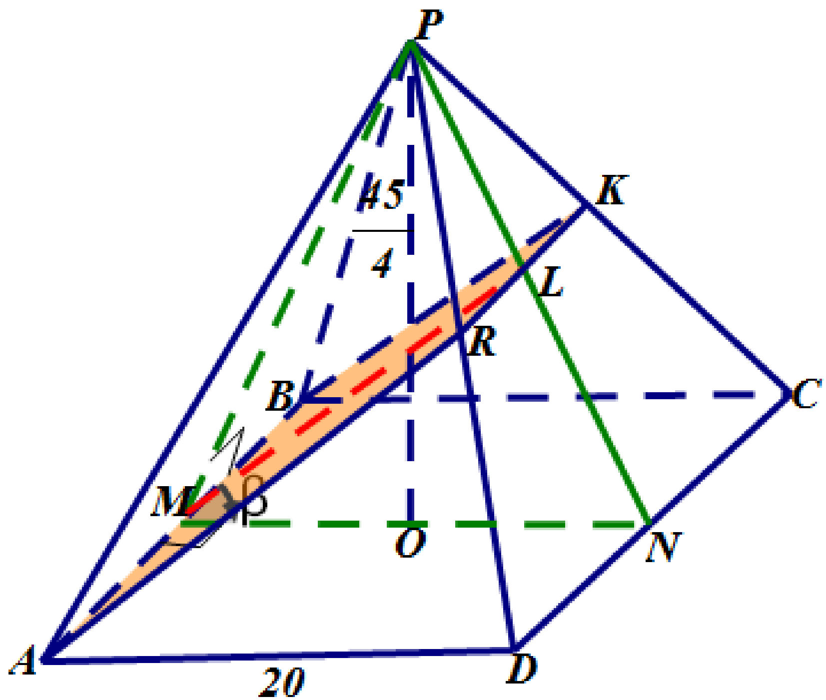
$\underline{\Delta PNO}$

$$\text{tg } \varphi = \frac{9}{8} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{9}{\sqrt{145}}, cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{145}}$$

$$LN = \frac{MN \cdot sin\beta}{\sin(\varphi + \beta)} = \frac{20 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{9}{\sqrt{145}} \cdot \frac{4}{5} + \frac{8}{\sqrt{145}} \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{145}$$

$$\text{PL=PN-LN=PM-LN=} \frac{5\sqrt{145}}{4} - \sqrt{145} = \frac{\sqrt{145}}{4}$$

$$\frac{PL}{LN} = 1:4$$



$$S_{ABKR} = \frac{AB + KR}{2} \cdot ML$$

ΔPKR~ΔPCD

PL:PN=KR:CD=1:5

KR=$\frac{1}{5} DC = 4$

<u>ΔMLN</u> $ML^2 = MN^2 + LN^2 - 2MN \cdot LN\cos\varphi$

$$ML^2 = 400 + 145 - 2 \cdot 20 \cdot \sqrt{145} \cdot \frac{8}{\sqrt{145}} =$$

=545-320=225

$$S_{ABKR} = \frac{20 + 4}{2} \cdot 15 = 180.$$

Ответ. 180

Книги можно заказать в нашем интернет-магазине на сайте www.legionr.ru

Спрашивайте в книжных магазинах города!