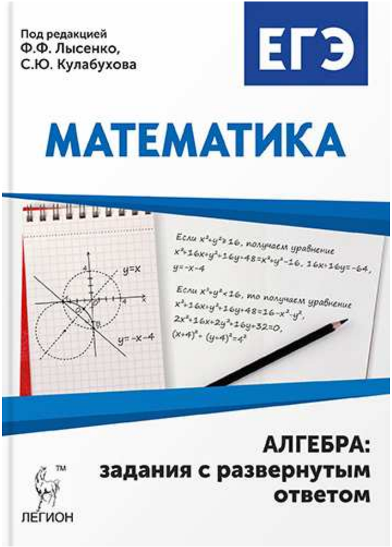
Издательство «Легион»

Задания по алгебре повышенного уровня сложности в ЕГЭ

Дерезин Святослав Викторович

7 ноября 2016 г.

Новая книга


Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова
ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
y=x
y=-x-4
АЛГЕБРА:
задания с развернутым
ответом
ЛЕГИОН

План вебинара

- Неравенства
- Экономические задачи
- Задачи с параметром
- Олимпиадные задачи

Часть I. Методы решения неравенств

- Сведение неравенств различного вида к простейшим
- Метод интервалов
- Метод замены переменных
- Метод разложения на множители
- Метод рационализации
- Метод оценки
- Учёт ОДЗ
- Использование производной
- Применение известных неравенств

1. Решите неравенство $2\log_6 x < \log_6(12 - x)$.

Решение:

Найдём область допустимых значений неравенства.

$\begin{cases} x > 0, \\ 12 - x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < 12; \end{cases} \quad 0 < x < 12.$

Преобразуем неравенство: $\log_6 x^2 < \log_6(12 - x)$. Учитывая, что основание $6 > 1$, получаем $x^2 < 12 - x$, $x^2 + x - 12 < 0$, $-4 < x < 3$. Учитывая ОДЗ, получаем $0 < x < 3$.

Ответ $(0; 3)$.

2. Решите неравенство $\dfrac{(4x+6)\sqrt{x^2-3x-4}}{5-x} \leqslant 0.$

Решение:

Область допустимых значений $\begin{cases} 5-x \neq 0, \\ x^2-3x-4 \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq 5, \\ x \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty); \end{cases}$ $\quad x \in (-\infty; -1] \cup [4; 5) \cup (5; +\infty).$

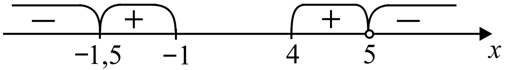
Найдём корни уравнения $(4x+6)\sqrt{x^2-3x-4} = 0.$

$x = -1{,}5;\ \ x = -1;\ \ x = 4.$

Все эти числа входят в область допустимых значений и являются решениями исходного неравенства.

Метод интервалов

Наносим область допустимых значений и найденные числа на числовую ось и определяем знаки на каждом получившемся промежутке.



Решение неравенства: $x \leqslant -1{,}5$, $x = -1$, $x = 4$ и $x > 5$.

Ответ: $(-\infty; -1{,}5] \cup \{-1; 4\} \cup (5; +\infty)$.

3. Решите неравенство $25 \cdot 9^x - 34 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x \geqslant 0$.

Решение:

Поделим обе части неравенства на $9^x > 0$:

$25 \cdot \frac{9^x}{9^x} - 34 \cdot \frac{15^x}{9^x} + 9 \cdot \frac{25^x}{9^x} \geqslant 0, \quad 9 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 34 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{x} + 25 \geqslant 0.$

Замена $t = \left(\frac{5}{3}\right)^x$, $9t^2 - 34t + 25 \geqslant 0$, $t \leqslant 1$ или $t \geqslant \frac{25}{9}$.

Обратная замена $\left(\frac{5}{3}\right)^x \leqslant 1$ или $\left(\frac{5}{3}\right)^x \geqslant \frac{25}{9}$, откуда $x \leqslant 0$ или $x \geqslant 2$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Метод оценки

4. Решите неравенство $\log_5^2(3x-3)+\sqrt{3x-4}+|8x-6x^2|\leqslant 0.$

Решение:

$\log_5^2(3x-3)\geqslant 0;\quad \sqrt{3x-4}\geqslant 0;\quad |8x-6x^2|\geqslant 0;$
следовательно, левая часть неравенства неотрицательна. Исходное неравенство выполняется, если каждое слагаемое равно нулю.

$$\begin{cases}\log_5^2(3x-3)=0,\\ \sqrt{3x-4}=0,\\ |8x-6x^2|=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}3x-3=1,\\ x=\dfrac{4}{3},\\ x=0,\ x=\dfrac{4}{3};\end{cases}\qquad x=\frac{4}{3}.$$

Ответ: $x=\dfrac{4}{3}.$

5. Решите неравенство $\log_2^2(7x + 2 - 4x^2) + 3x + 1 > 0$.

Решение:

Найдём ОДЗ: $7x + 2 - 4x^2 > 0$, $4x^2 - 7x - 2 < 0$, $-\dfrac{1}{4} < x < 2$.

Оценим значение выражения $3x + 1$.

$-\dfrac{3}{4} < 3x < 6$, $-\dfrac{3}{4} + 1 < 3x + 1 < 6 + 1$, $\dfrac{1}{4} < 3x + 1 < 7$.

Мы получили, что $3x + 1 > 0$ на ОДЗ. Так как $\log_2^2(7x + 2 - 4x^2) \geqslant 0$ как квадрат выражения, левая часть исходного неравенства положительна при всех допустимых значениях, значит, исходное неравенство выполняется при условии $-\dfrac{1}{4} < x < 2$.

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{4}; 2\right)$.

- Простые экономические задачи. Проценты, доли и соотношения
- Вклады
- Кредиты
- Использование свойств функций
- Применение производной

Проценты, доли и соотношения

A_0 — первоначальная сумма; $x\%$ — начисляемый процент в конце периода (месяц, квартал, год и т.п.); m — число периодов, A_m — сумма через m периодов.

Простые проценты:

$$A_m = \left(1 + m \cdot \frac{x}{100}\right) A_0.$$

Сложные проценты:

$$A_m = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^m A_0.$$

6. Магазин увеличил цену товара в 8 раз. Однако по результатам проверки антимонопольная служба предписала вернуть прежнюю цену. На сколько процентов придётся снизить цену?

Решение:

Пусть изначально товар стоил x рублей.
Тогда после подорожания он стал стоить 8x рублей.
По результатам проверки цена снизилась на 7x, что составляет $\frac{7x}{8x} \cdot 100\% = 87{,}5\%$ от суммы 8x рублей.

Ответ: 87,5.

7. 15-го января был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг (ТД) выражается в процентах от кредита.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
ТД	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 4%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Кредит-таблица

Решение:

Пусть S — сумма кредита; x_1, x_2, …, x_6 — выплаты в первой половине февраля, марта и т.д. Составим уравнения, которые отражают график погашения кредита.

$$
\begin{aligned}
&\text{На } 15.02: && 1{,}04S - x_1 = 0{,}9S,\\
&\text{На } 15.03: && 1{,}04 \cdot 0{,}9S - x_2 = 0{,}8S,\\
&\text{На } 15.04: && 1{,}04 \cdot 0{,}8S - x_3 = 0{,}7S,\\
&\text{На } 15.05: && 1{,}04 \cdot 0{,}7S - x_4 = 0{,}6S,\\
&\text{На } 15.06: && 1{,}04 \cdot 0{,}6S - x_5 = 0{,}5S,\\
&\text{На } 15.07: && 1{,}04 \cdot 0{,}5S - x_6 = 0.
\end{aligned}
$$

Сложим все уравнения.

Кредит-таблица

$1{,}04S\cdot(1+0{,}9+\ldots+0{,}5)-(x_1+x_2+\ldots+x_6) = S\cdot(0{,}9+0{,}8+\ldots+0{,}5).$

Пусть $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_6$ — общая сумма выплат.

Поскольку $5 + 6 + \ldots + 9 = \dfrac{5+9}{2}\cdot 5 = 35$, имеем уравнение

$$1{,}04S\cdot 4{,}5 - X = S\cdot 3{,}5,$$

$$X = S\cdot(1{,}04\cdot 4{,}5 - 3{,}5) = 1{,}18S.$$

Таким образом, общая сумма выплат на 18% больше суммы самого кредита.

Ответ: 18.

Новое издание книги по экономической задаче

Часть III. Методы решения задач с параметрами

- Алгебраические выражения и параметр как переменная
- Линейные уравнения и неравенства
- Квадратные уравнения и уравнения, сводящиеся к квадратным
- Неравенства
- Функции и их свойства
- Построение графиков уравнений
- Применение производной
- Построение графиков неравенств
- Уравнения с модулем
- Графическо-функциональный метод решения
- Аналитический способ решения
- Задачи с параметром уровня ЕГЭ

Алгебраические выражения и параметр как переменная

8. Найдите все значения параметра p, при которых выражение $\log_p 4 + \log_p 8$ принимает значение 2,5.

Решение:

$\log_p 4 + \log_p 8 = 2{,}5$; $\log_p(4 \cdot 8) = 2{,}5$; $\log_p 2^5 = 2{,}5$; $5\log_p 2 = 2{,}5$; $\log_p 2 = 0{,}5$; $p^{0{,}5} = 2$; $\sqrt{p} = 2$; $p = 4$.

Ответ: 4.

9. Найдите все значения параметра p, при которых график функции $y = p^2x - 2x^2$ проходит через точку $(3; 9)$.

Решение:

Запишем координаты заданной точки: $x = 3$, $y = 9$ и подставим эти значения в уравнение функции.

Получим $9 = p^2 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2$, $p^2 = 9$, $p = \pm 3$.

Ответ: $-3; 3$.

10. Решите уравнение $2a(x-5)+a = a(x-a)$ при всех значениях параметра a.

Решение:

Выполним преобразования.
$2ax - 10a + a = ax - a^2$,
$2ax - ax = -a^2 + 9a$,
$ax = -a^2 + 9a$.

Рассмотрим два случая:

1) $a \neq 0$. Тогда $x = \dfrac{a(-a+9)}{a}$, $x = 9 - a$.

2) $a = 0$. В этом случае уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$. Это равенство верно при любом значении x, значит, $x \in R$.

Ответ: Если $a = 0$, $x \in R$. Если $a \neq 0$, $x = 9 - a$.

11. Для каждого значения параметра a решите неравенство $ax \leqslant 3a^2 + 9$.

Решение:

Возможны три случая:

1) $a < 0$. Исходное неравенство равносильно неравенству $x \geqslant 3a + \dfrac{9}{a}$; $x \in \left[3a + \dfrac{9}{a}; +\infty\right)$.

2) $a = 0$. Исходное неравенство равносильно неравенству $0 \cdot x \leqslant 9$; неравенство верно при любом $x \in R$.

3) $a > 0$. Исходное неравенство равносильно неравенству $x \leqslant 3a + \dfrac{9}{a}$; $x \in \left(-\infty;\ 3a + \dfrac{9}{a}\right]$.

Ответ: $x \in \left[3a + \dfrac{9}{a}; +\infty\right)$ при $a < 0$; $x \in R$ при $a = 0$;

$x \in \left(-\infty; 3a + \dfrac{9}{a}\right]$ при $a > 0$.

12. При каких значениях параметра m уравнение

$$mx^2 - 5x + 1 = 0$$

имеет единственный корень?

Решение:

При $m = 0$ уравнение становится линейным $-5x + 1 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = 0{,}2$.

При $m \neq 0$ уравнение квадратное, оно имеет один корень при $D = 0$.
Дискриминант $D = 5^2 - 4 \cdot m = 25 - 4m$.
$D = 0$, если $25 - 4m = 0$, то есть $m = 6{,}25$.

Значит, уравнение имеет единственный корень при $m = 0$ и $m = 6{,}25$.

Ответ: 0; 6,25.

Неравенства

13. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} -x^2 + 14x - a \geqslant 0, \\ x \leqslant 4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Решение:

Так как корнями квадратного трёхчлена в левой части первого неравенства системы при $a \leqslant 49$ являются числа $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 - a}$, то множеством решений этого неравенства является $\left[7 - \sqrt{49 - a}; 7 + \sqrt{49 - a}\right]$.

Система будет иметь хотя бы одно решение при $7 - \sqrt{49 - a} \leqslant 4$; $\sqrt{49 - a} \geqslant 3$; $49 - a \geqslant 9$; $a \leqslant 40$.

Ответ: $(-\infty; 40]$.

7. При каком наибольшем целом значении параметра a область определения функции $f(x) = \log_{x-a} 5$ содержит точку $x = 5$?

Решение:

По условию должно иметь смысл выражение $\log_{5-a} 5$, поэтому $5 - a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$, что равносильно $a \in (-\infty; 4) \cup (4; 5)$.

Наибольшим целым значением из этого множества является $a = 3$.

Ответ: 3.

8. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + 8x + y^2 = 0, \\ x^2 - 2ax + y^2 + a^2 = 1 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение:

Уравнение $x^2 + 8x + y^2 = 0$ можно привести к виду

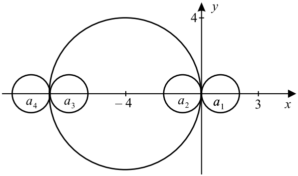
$$(x + 4)^2 + y^2 = 16,$$

его график — окружность с центром в точке A $(-4; 0)$ и радиусом $R = 4$.

Уравнение $x^2 - 2ax + y^2 + a^2 = 1$ можно привести к виду

$$(x - a)^2 + y^2 = 1,$$

его график — окружность с центром в точке $(a; 0)$ и радиусом $R = 1$. При увеличении значения параметра a окружность сдвигается вдоль оси абсцисс в положительном направлении.



Окружности касаются, если расстояние между их центрами равно разности или сумме их радиусов. В этом случае у окружностей одна общая точка.

Если расстояние между их центрами меньше разности или больше суммы их радиусов, то окружности не имеют общих точек.

Если же это расстояние больше разности, но меньше суммы их радиусов, то окружности пересекаются в двух точках и, следовательно, система имеет 2 решения.

Для a_1 и a_2 $(a > -4)$ расстояние между центрами равно $a-(-4)$, получаем $4-1 < a-(-4) < 4+1$, $\;-1 < a < 1$.

Для a_3 и a_4 $(a < -4)$ расстояние между центрами равно $(-4)-a$, получаем $4-1 < -4-a < 4+1$, $\;-9 < a < -7$.

Данные значения получить непосредственно из рисунка.

Ответ: $a \in (-9; -7) \cup (-1; 1)$.

9. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a-1)49^x-(a+1)7^x-5a+2=0$ имеет ровно один корень.

Решение:

После замены $t=7^x$ задача сводится к:

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a-1)t^2-(a+1)t-5a+2=0$ имеет ровно один положительный корень.

Раскроем скобки и выразим параметр a.
$a(t^2-t-5)=t^2+t-2$.

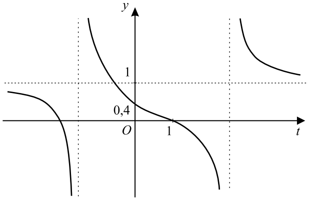
При $t^2-t-5=0$, то есть $t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$, корней нет.

При $t^2-t-5\neq 0$ получим $a=\dfrac{t^2+t-2}{t^2-t-5}=1+\dfrac{2t+3}{t^2-t-5}$.

$a'=\dfrac{(2t+3)'(t^2-t-5)-(2t+3)(t^2-t-5)'}{(t^2-t-5)^2}$, $a'=-\dfrac{2t^2+6t+7}{(t^2-t-5)^2}$.

На области определения $a'(t) < 0$, значит, $a(t)$ убывает на каждом промежутке непрерывности. Горизонтальная асимптота $a = 1$ показывает поведение графика функции при t стремящемся к бесконечности.

Построим график функции $y = a(t)$. $a(0) = 0{,}4$.



Прямая $y = a$ пересекает график функции в двух точках $t = t_1$ и $t = t_2$, если $a \neq 1$. При этом $t_1 \leqslant 0$ и $t_2 > 0$, если $a < 0{,}4$ или $a > 1$. Тогда начальное уравнение имеет ровно один корень.

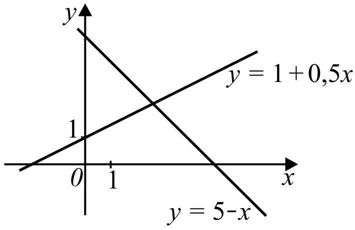
Ответ: $(-\infty; 0{,}4) \cup (1; +\infty)$.

10. Изобразите множество точек, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} 3x + 3y - 15 \geqslant 0, \\ x - 2y \leqslant -2. \end{cases}$

Решение:

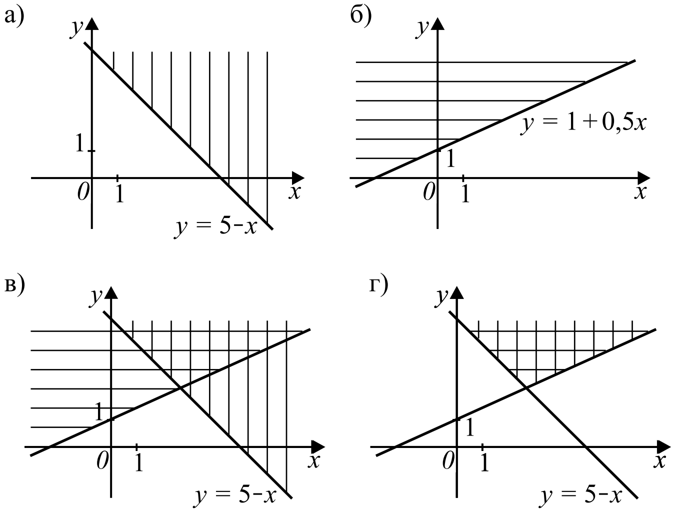
Запишем систему в виде $\begin{cases} y \geqslant 5 - x, \\ y \geqslant 0{,}5x + 1. \end{cases}$

Построим прямые $y = 5 - x$ и $y = 0{,}5x + 1$.



Построение графиков неравенств

Решение системы показано двойной штриховкой.



Часть IV. Методы решения олимпиадных задач

- Вводные задачи
- Чётность
- Делимость
- Логика и перебор
- Последовательности и прогрессии
- Проценты, доли, части
- Элементы комбинаторики
- "Оценка + пример"

14. Запишите число 100, используя все 10 цифр и знаки некоторых арифметических действий.

Решение:

$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 100.$

15. Вычислите: $99 - 97 + 95 - 93 + ... + 7 - 5 + 3 - 1.$

Решение:

$99 - 97 + 95 - 93 + \ldots + 7 - 5 + 3 - 1 = (99 - 97) + (95 - 93) + \ldots$
$+(7 - 5) + (3 - 1) = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2 \cdot 25 = 50.$

Ответ: 50.

16. Даны два целых числа a и b. Докажите, что число $ab(a+b)$ является чётным.

Решение:

Если одно из чисел чётно, тогда и произведение чисел чётно. Если же они оба нечётны, тогда их сумма — чётное число, и поэтому в любом случае данное произведение — чётное число.

17. Пусть a_1, a_2, …, a_{2016} — целые числа. Докажите, что число $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{2015} - a_{2016}| + |a_{2016} - a_1|$ чётно.

Решение:

Сумма всех выражений под модулем равна 0, т. е. чётна. Т. к. чётность чисел a и $|a|$ совпадает, то чётность сумм $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2015} - a_{2016}) + (a_{2016} - a_1)$ и $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{2015} - a_{2016}| + |a_{2016} - a_1|$ совпадает.

Делимость

- Основная теорема арифметики

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$$

- Формула количества делителей

$$N(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_m + 1)$$

- Десятичная форма записи натурального числа

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

18. Сумма некоторого двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, является точным квадратом. Найти все такие числа.

Решение:

Пусть a, b — цифры двузначного числа $\overline{ab} = 10a + b$.
Тогда $\overline{ba} = 10b + a$.
По условию $10a + b + 10b + a = n^2$ или $11(a + b) = n^2$, где n — некоторое натуральное число. Значит, n делится на 11, но тогда n^2 делится на 121, а значит, a + b тоже делится на 11.

Таких пар a и b возможно четыре: (9, 2), (8, 3), (7, 4), (6, 5). Им отвечают 8 чисел: 92, 29, 83, 38, 74, 47, 65, 56.

Ответ: 92, 29, 83, 38, 74, 47, 65, 56.

- Принцип Дирихле: «Если в n клеток посадить n + 1 зайцев, то найдётся хотя бы одна клетка, в которой находятся не менее чем 2 зайца».

19. В походе участвовало 25 человек, каждому из которых было от 24 до 30 полных лет (на данный день). Докажите, что найдутся четыре человека, родившихся в один год.

Решение:

Различных годов рождения может быть 8. Предположим, что каждый год родилось не более трёх участников похода. Тогда всего будет не более $3 \cdot 8 = 24$ участников похода. Но по условию в походе участвовало 25 человек. Получили противоречие. Значит, найдутся четыре участника похода, родившихся в один год.

20. Докажите, что число $p^2 - 1$ делится на 24, если p — простое, $p > 3$.

Решение:

Так как $p-1$, p, $p+1$ — последовательные натуральные числа и p — число простое, $p > 3$, то

а) $p - 1$ или $p + 1$ делится на 3;

б) p — нечётное (единственное чётное простое число — 2), это означает, что $p - 1$ и $p + 1$ — чётные, при этом одно из них делится на 4.

Из а), б) следует, что $p^2-1 = (p-1)(p+1)$ делится одновременно и на 3, и на 8, а значит, и на 24.

21. Дано натуральное число n. Сколько решений в неотрицательных целых числах имеет система $x + y = z + t = n$?

Решение:

Пусть S — искомое число решений системы. Поскольку уравнения $x + y = n$ и $z + t = n$ независимы, его можно представить в виде $S = S_1 \cdot S_2$, где S_1 — число решений первого уравнения, S_2 — число решений второго уравнения. В силу очевидной симметрии $S_1 = S_2$. Число решений одного уравнения равно $n + 1$ (каждое неизвестное может принимать значения от 0 до n, однозначно определяя тем самым другое неизвестное). Таким образом, $S = (n + 1)^2$.

Ответ: $(n + 1)^2$.

Оценка + пример

22. На доске написано более 20, но менее 30 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 5, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -10.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Оценка + пример

Решение:

Пусть всего на доске было записано n чисел, $20 < n < 30$.

Пусть среди этих чисел было k положительных, обозначим их $a_1, a_2, \ldots, a_k$; m отрицательных, обозначим их $b_1, b_2, \ldots, b_m$; и p нулей. Тогда $k + m + p = n$ и по условию задачи

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + b_1 + b_2 + \ldots + b_m + 0 + 0 + \ldots + 0}{n} = -3,$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} = 5, \quad \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_m}{m} = -10.$$

Из этих равенств следует, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + b_1 + b_2 + \ldots + b_m + 0 + 0 + \ldots + 0 = -3n,$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 5k, \quad b_1 + b_2 + \ldots + b_m = -10m.$$

Отсюда имеем $5k - 10m = -3n$.

Оценка + пример

а) Заметим, что в равенстве $5k - 10m = -3n$ левая часть делится нацело на 5, значит, и правая тоже делится на 5. Из этого следует, что n делится нацело на 5. Так как $20 < n < 30$, то $n = 25$.

б) Подставим в равенство $5k - 10m = -3n$ выражение для $n = k + m + p$. Получим $5k - 10m = -3(k + m + p)$, $8k + 3p = 7m$. Поскольку $p \geqslant 0$, то $8k \leqslant 7m$. Это означает, что $k < m$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

Оценка + пример

в) Подставим в формулу $5k - 10m = -3n$ значение $n = 25$. Получим $5k - 10m = -75$, откуда $k = 2m - 15$. Так как $k + m = 25 - p \leqslant 25$, имеем $2m - 15 + m = 3m - 15 \leqslant 25$, $3m \leqslant 40$, $m \leqslant 13$. Тогда $k = 2m - 15 \leqslant 11$, т.е. положительных чисел не более 11.

Приведём пример, показывающий, что положительных чисел может быть ровно 11. Пусть на доске 11 раз было написано число 5, 13 раз написано число −10 и один раз написан 0. Тогда

$$\frac{11 \cdot 5 + 13 \cdot (-10)}{25} = -\frac{75}{25} = -3.$$

Таким образом, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 25; б) отрицательных; в) 11.

Книга для подготовки к тригонометрии

Спасибо за внимание!