

Задания с параметром в ОГЭ

Автор Коннова Елена Генриевна

Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2017 году основного государственного экзамена

Модуль	Алгебра		
Номер задания	21	22	23
Уровень сложности	П	П	В
Ожидаемый процент выполнения	30–50	15–30	3–15

Основные проверяемые требования к математической подготовке

Таблица 5.
Распределение заданий части 2 по проверяемым умениям и способам действий

Код по КТ	Основные умения и способы действий	Количество заданий
2	Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений	1
3	Уметь решать уравнения, неравенства и их системы	1
4	Уметь строить и читать графики функций	1

Таблица 14.
Система формирования общего балла

Модуль «Алгебра»						
Максимальное количество баллов за одно задание				Максимальное количество баллов		
Часть 1	Часть 2			За часть 1	За часть 2	За модуль в целом
№ 1–8	№ 21	№ 22	№ 23			
1	2	2	2	8	6	14

рекомендуемый минимальный критерий:

8 баллов, набранные по всей работе, из них – не менее 3 баллов по модулю «Алгебра», не менее 2 баллов по модулю «Геометрия» и не менее 2 баллов по модулю «Реальная математика».

Ниже представлена рекомендованная ФИПИ шкала пересчёта первичного балла в экзаменационную отметку по пятибалльной шкале: суммарного балла за выполнение заданий — в экзаменационную отметку по математике.

Отметка по пятибалльной шкале	«2»	«3»	«4»	«5»
Суммарный балл за работу в целом	0–7	8–14	15–21	22–32

Задания, оцениваемые в 2 балла, считаются выполненными верно, если обучающийся выбрал правильный путь решения, из письменной записи решения понятен ход его рассуждений, получен верный ответ. В этом случае ему выставляется полный балл, соответствующий данному заданию. Если в решении допущена ошибка, не имеющая принципиального характера и не влияющая на общую правильность хода решения, то участнику выставляется 1 балл.

12. Изменения в КИМ 2016 года в сравнении с 2015 годом

Структура и содержание экзаменационной работы не изменились. Скорректирована система оценивания заданий 22, 23, 25, 26 (максимальный балл за выполнение каждого из них – 2). Максимальный первичный балл за выполнение всей работы снижен с 38 до 32.

Изменений в КИМ 2017 года в сравнении с 2016 – нет.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОЦЕНИВАНИЮ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ОГЭ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

- **Задания, оцениваемые в 2 балла, считаются выполненными верно**, если обучающийся выбрал правильный путь решения, из письменной записи решения понятен ход его рассуждений, получен верный ответ. В этом случае ему выставляется полный балл.
- **Нужно нацеливать учащихся на лаконичность** и не требовать подробных комментариев и формулировок теорем, при этом в решении надо показать, что ученик владеет теоретическим материалом.
- **Если в решении допущена ошибка непринципиального характера** (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся **засчитывается 1 балл**.
(из рекомендаций ФИПИ)

СКИДКА 15%

**на все пособия по математике и
информатике**

Действует до 10:00 21.04.2017

При заказе в интернет-магазине ввести этот код:

CP-UZPY5-92GA57V

Каталог по заданиям,
каталог по умениям,
каталог по содержанию –
<http://mathgia.ru>

Каталог по содержанию
[http://opengia.ru/subjects/mathematics-](http://opengia.ru/subjects/mathematics-9/topics/1)
[9/topics/1](http://opengia.ru/subjects/mathematics-9/topics/1)



Задание 23.

Основным условием получения положительной оценки за решение этого задания является верное построение графика. Верное построение графика включает в себя следующее: правильно подобранный и отображённый на рисунке масштаб, содержательную таблицу значений или объяснение построения, выколотую точку (точки), обозначенную в соответствии с её координатами.

Баллы	Критерии оценивания выполнения заданий
2	График построен правильно, верно указаны все значения c , при которых прямая $y = c$ имеет с графиком только одну общую точку
1	График построен правильно, указаны не все верные значения c
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям
2	Максимальный балл

23	Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели
----	---

Виды заданий №23

- требуется построить график и затем найти значения параметра,
 - требуется найти значения параметра и затем построить график.
-
- построить график дробно-рациональной функции,
 - построить график кусочно-заданной функции,
 - построить график функции, содержащей модуль.

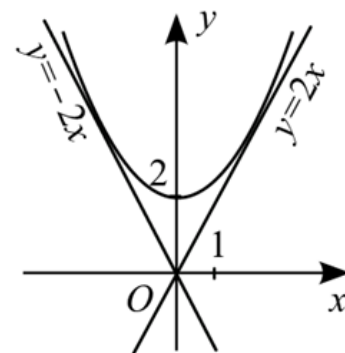
Задача 3. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = 0,5x^2 + 2$ ровно одну общую точку. Постройте график и все такие прямые.

Решение. Общие точки прямой $y = kx$ и графика функции $y = 0,5x^2 + 2$ определяются из уравнения $0,5x^2 + 2 = kx$. Такая точка одна, если уравнение $0,5x^2 - kx + 2 = 0$ имеет один корень, при этом его дискриминант $D = k^2 - 4$ должен быть равен нулю. Получаем $k^2 - 4 = 0, k = \pm 2$.

Построим график параболы $y = 0,5x^2 + 2$ с вершиной $(0;2)$ и графики прямых $y = 2x; y = -2x$ (см. рис. 14).

Видим, что каждая из этих прямых имеет с графиком функции $y = 0,5x^2 + 2$ ровно одну общую точку.

Ответ: $-2; 2$.



23. При каком значении b прямая $y = b - x$ имеет с параболой $y = -x^2 - 4x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении b .

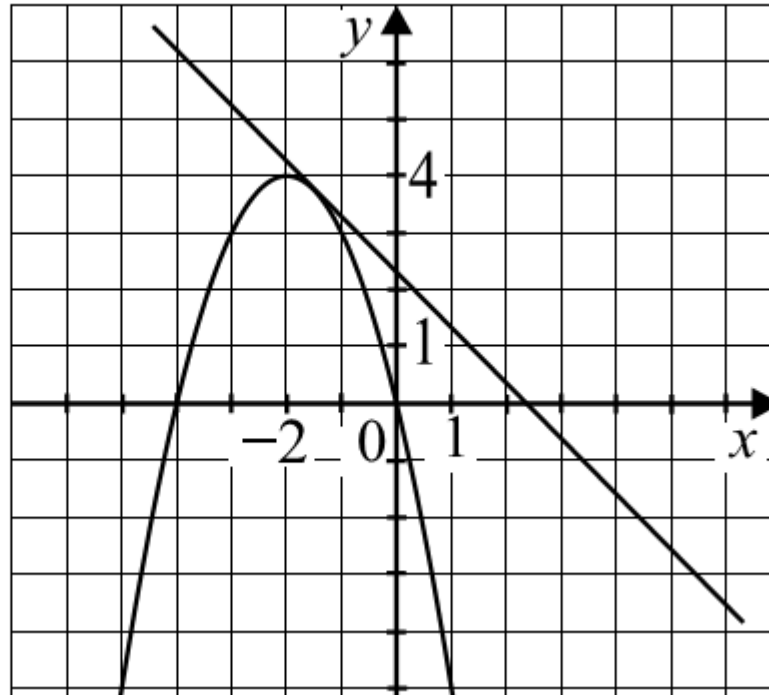
Решение:

Прямая $y = b - x$ и парабола $y = -x^2 - 4x$ имеют столько общих точек, сколько корней в уравнении $b - x = -x^2 - 4x$
 $x^2 + 3x + b = 0$. Квадратное уравнение имеет ровно один корень, если его дискриминант равен нулю.

$$D = 3^2 - 4b = 9 - 4b = 0, -4b = -9, b = \frac{9}{4}.$$

Искомое b равно 2,25. Прямая имеет вид $y = 2,25 - x$. Координаты общей точки $x = -\frac{3}{2} = -1,5; y = 3,75$.

Построим графики. Парабола $y = -x^2 - 4x$ имеет вершину в точке с координатами $x_0 = \frac{4}{-2} = -2$, $y_0 = 4$. Ветви направлены вниз.



Ответ: 2,25, $(-1,5; 3,75)$.

Дробно-рациональные функции

- 1) разложить на множители числитель и знаменатель дроби, входящей в уравнение функции;
- 2) выписать область определения функции (ОДЗ);
- 3) сократить дробь;
- 4) построить график получившегося уравнения и учесть ОДЗ (то есть отметить выколотые точки);
- 5) пользуясь графиком, найти те значения параметра, которые спрашивают в условии.

Задача 1. Постройте график функции $y = -2 - \frac{(x + 4)}{(x^2 + 4x)}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком общих точек.

Решение. Преобразуем уравнение функции, разложив на множители числитель и знаменатель дроби.

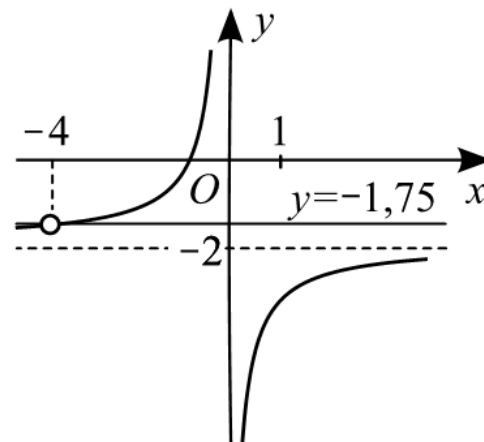
$$-2 - \frac{(x+4)}{(x^2+4x)} = -2 - \frac{(x+4)}{x(x+4)} = -2 - \frac{1}{x}, \text{ значит,}$$
$$y = -2 - \frac{1}{x}, \text{ если } x \neq -4 \text{ и } x \neq 0.$$

Если $x = -4$, то функция не определена. Заметим, что при $x = -4$ выполняется $-2 - \frac{1}{x} = -2 - \frac{1}{-4} = -1,75$.

Графиком заданной функции является гипербола $y = -\frac{1}{x}$, сдвинутая на 2 единицы вниз, с выколотой точкой $(-4; -1,75)$ (см. рис. 10).

Прямая $y = t$ — горизонтальная прямая, пересекающая ось ординат в точке $(0; t)$. Она не имеет с графиком общих точек при $t = -2$ и $t = -1,75$.

Ответ: $-2; -1,75$.



$$23. \quad y = -2 - \frac{x+4}{x^2+4x} = -2 - \frac{(x+4)}{x(x+4)} = -2$$

x	1	2	-1	-2	
y	-3	-2,5	-1	-1,5	

ОДЗ: $x \neq 0;$
 $x \neq -4.$

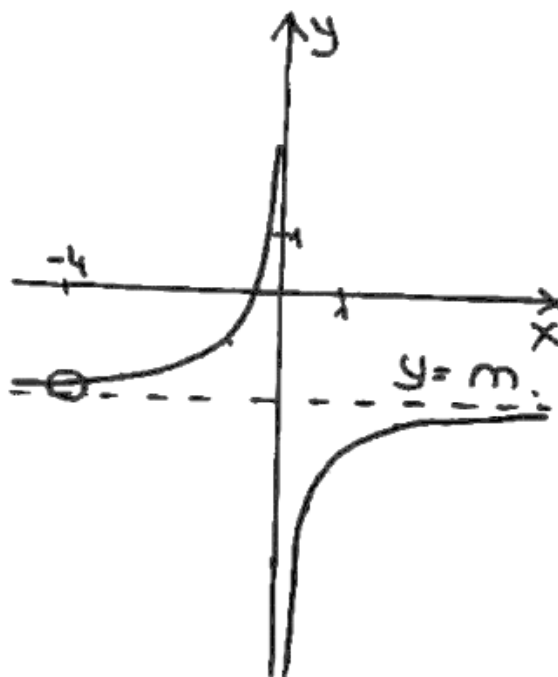
$$y = m; \quad m = -2.$$

$$y = -2 - \frac{1}{-4} = -2 + 0,25 =$$

$$= -1,75.$$

$$m = -1,75.$$

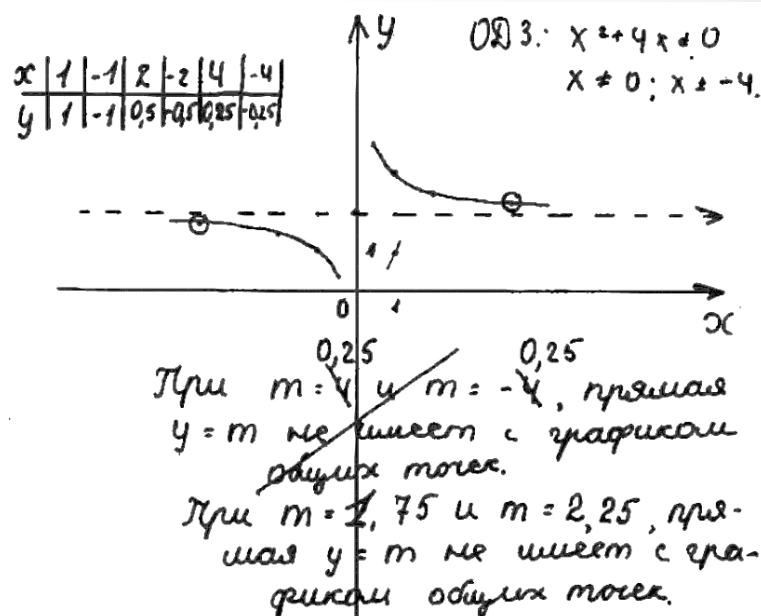
Ответ: $m = -2; \quad m = -1,75.$



Комментарий. За верно выполненное решение выстав-
 ляется 2 балла.

Пример 2.

23. $y = -2 - \frac{x+4}{x^2+4x} = \frac{-2x^2-8x-4-x}{x^2+4x} =$
 $= \frac{-2x^2-9x-4}{x^2+4x} = \frac{2x^2+9x+4}{x^2+4x}$
 $2x^2+9x+4=0.$
 $D = 81-32 = 49.$
 $\frac{-9 \pm 7}{4}; x_1 = -4, x_2 = -0,5.$
 $y = \frac{2(x+4)(x+0,5)}{x(x+4)} = \frac{2(x+0,5)}{x} =$
 $= \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}; y = \frac{1}{x}; A(0;2)$



Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как была допущена ошибка в преобразованиях заданного уравнения функции (правую часть уравнения умножили на -1 , а левую нет), с учётом этой ошибки график построен неправильно (выброшена точка с абсциссой $x = 4$).

23

Постройте график функции

$$y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$$

и определите, при каких

значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

N 23

$$y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$$

$$[9x^2+1 \neq 0; x \neq -\frac{1}{9}]$$

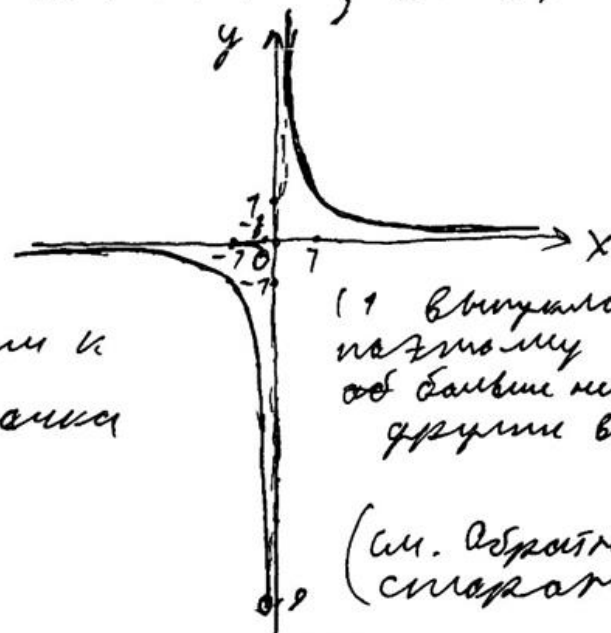
$$y = \frac{1}{x} \text{ отсюда}$$

$$y = -\frac{1}{9} \quad y = -9.$$

$$-9 = -\frac{1}{9}k$$

$k = 81$ - при этом k
табуляция точки

Ответ: $k = 81$



(1) Выпуклая,
поэтому
область имеет
другие вершины.

(см. обратные
спираль).

(при $k=0$ - 0 точек
при $k \neq 81$; 0 - 2 точки)

Комментарий.

Форма графика соблюдена, выколотая точка обозначена верно. Вторая часть задания выполнена верно.

Оценка эксперта: 2 балла.

23. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{(x - 1)(x + 2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение:

23. Разложим числитель дроби на множители:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

При $x \neq 1$ и $x \neq -2$ исходная функция примет вид

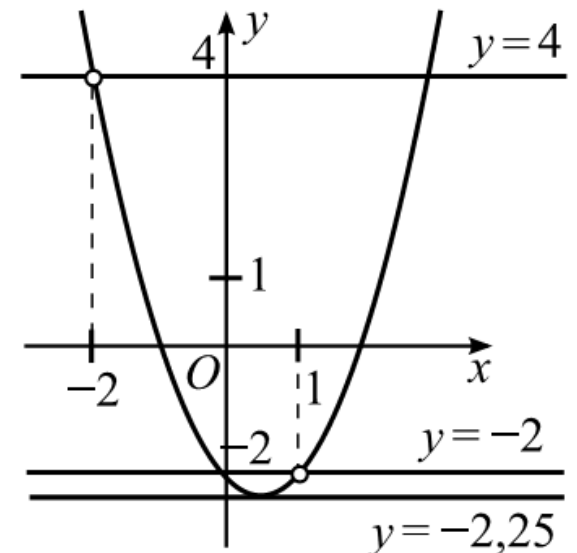
$y = (x + 1)(x - 2)$, её график — парабола, из которой выколоты точки $(1; -2)$ и $(-2; 4)$. Ветви параболы направлены вверх, вершина в точке

$(0,5; -2,25)$. Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда,

когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых выколота.

Отсюда $c = -2,25$, $c = -2$ или $c = 4$.

Ответ: $-2,25$; -2 ; 4 .



Кусочно-заданные функции

1. При обучении построению графиков кусочно-заданных функций сначала на оси абсцисс найдите граничные точки и разметьте координатную плоскость вертикальными прямыми, проходящими через граничные точки. Назовем получившиеся области полосами.

2. Строим график «по кускам», в каждой полосе по своей формуле. Если у нас несколько промежутков, на которых формулы разные, то не нужно проводить график каждой из них на всей координатной плоскости.

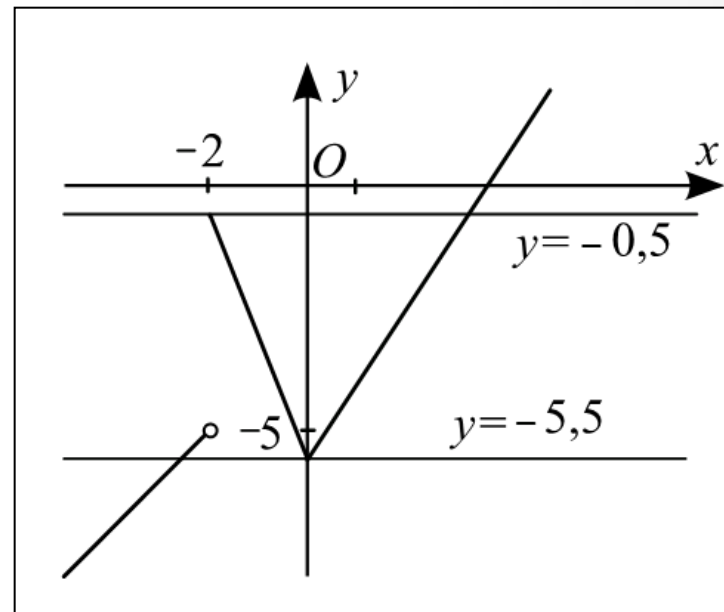
3. Помните, что при вычислении значений функции значения « x » нужно выбирать из соответствующих областей определения для каждой формулы. В каждой полосе считаем значения по соответствующей формуле.

4. Если граничная точка входит в промежуток (например, $y = x^2 - 20$, если $x \leq 5$), то считаем в ней значение функции ($y = 5^2 - 20 = 5$) и точку $(5; 5)$ оставляем «черной». Если граничная точка не входит в промежуток, но граничит с ним (например, $y = 3x$, если $x > 5$), то считаем в ней значение ($y = 3 \cdot 5 = 15$), если это возможно. Обозначаем точку $(5; 15)$ «выколотой», если это значение не совпало со значением функции на том участке, в который эта точка входит.

5. Если в граничной точке значения «граничащих» функций равны, то точку не нужно выделять!

Задача 1. Постройте график функции

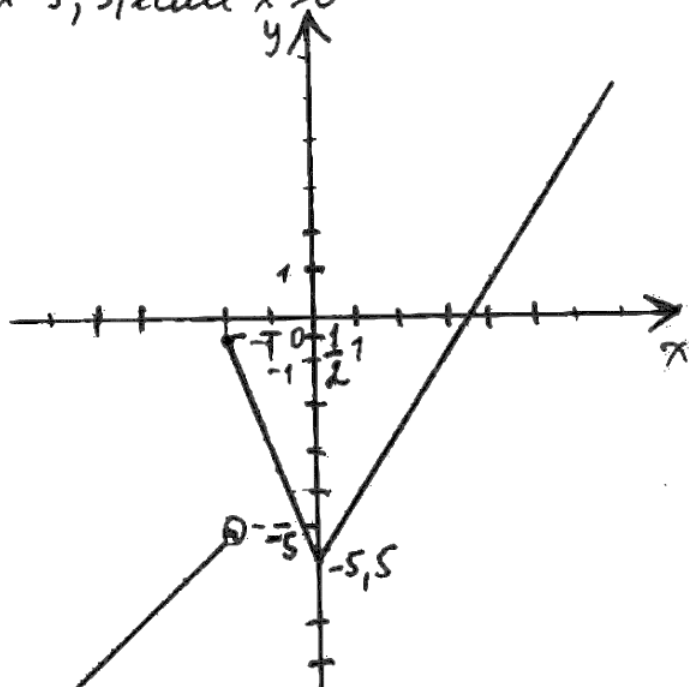
$$y = \begin{cases} x - 3, & \text{при } x < -2, \\ -2,5x - 5,5, & \text{при } -2 \leq x \leq 0, \\ 1,5x - 5,5, & \text{при } x > 0, \end{cases}$$
 и определите, каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.



№ 23

$$y = \begin{cases} x-3, & \text{если } x < -2 \\ -2,5x-5,5, & \text{если } -2 \leq x \leq 0 \\ 1,5x-5,5, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

x	-2	0	2
y	$-\frac{1}{2}$	-5,5	-2,5



Комментарий. График построен верно (форма графика соблюдена, выколота точка обозначена верно). Вторая часть задания не выполнена (не указаны значения c). За выполненное решение выставляется 1 балл.

Пример 2.

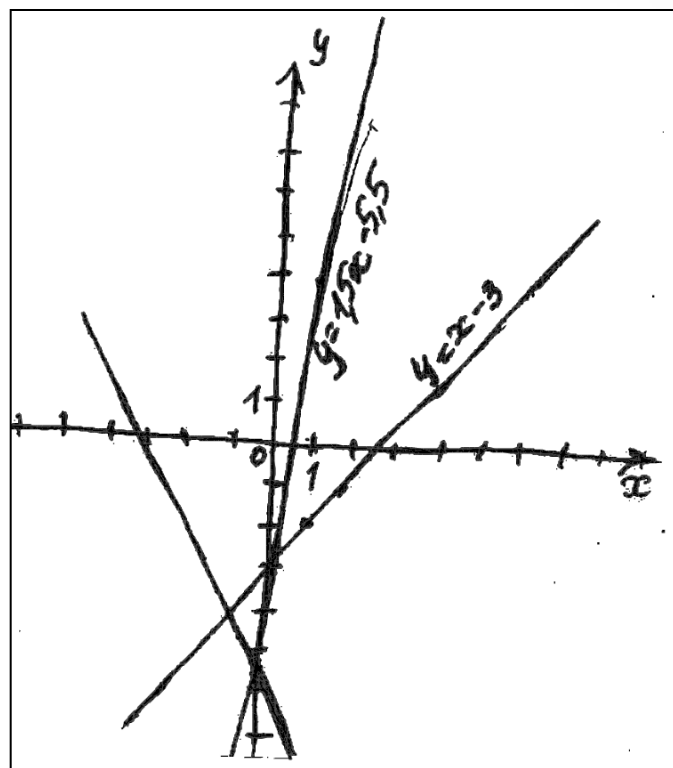
23.

$$y = x - 3$$

$$y = -2,5x - 5,5$$

$$y = 1,5x - 5,5$$

$$\begin{array}{r|l} 29 & 12 \\ \hline 9 & 2 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} x & 0 \\ \hline y & 8 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} x & 10 \\ \hline y & 15 \\ \hline \end{array}$$



Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как график построен неправильно — не учтены промежутки, на которых выполняются уравнения, задающие функцию кусочно, да и сами графики построены неверно.

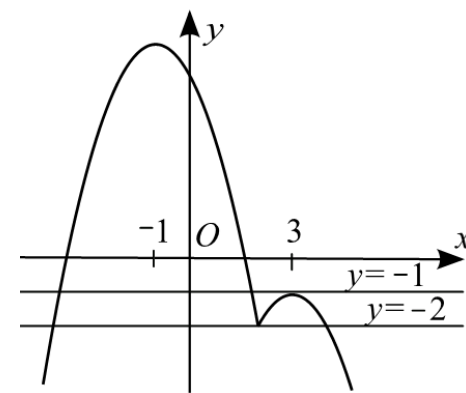
Задания с модулем

Задача 1. Постройте график функции $y = 4|x - 2| - x^2 + 2x - 2$ и определите, при каких значениях q прямая $y = q$ имеет с графиком не менее трёх общих точек.

Решение. Построим график заданной функции.

Если $x - 2 \geq 0$, то есть $x \geq 2$, то $y = -x^2 + 6x - 10$ — часть параболы с вершиной $(3; -1)$, $y(2) = -2$.

Если $x - 2 < 0$, то есть $x < 2$, то $y = -x^2 - 2x + 6$ — часть параболы с вершиной $(-1; 7)$ (см. рис. 15).



$y = q$ — прямая, параллельная оси абсцисс или совпадающая с ней.

По рисунку видно, что не менее трёх общих точек графики имеют при $-2 \leq q \leq -1$.

Ответ: $[-2; -1]$.

Задача 2. Постройте график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$ и определите, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение. Построим сначала график функции $y = x^2 - 4x + 3$. Это парабола с вершиной (x_0, y_0) , где $x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$, $y_0 = y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$.

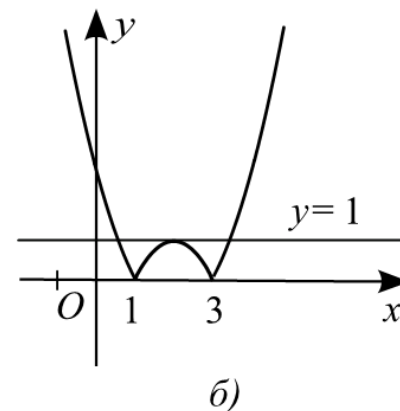
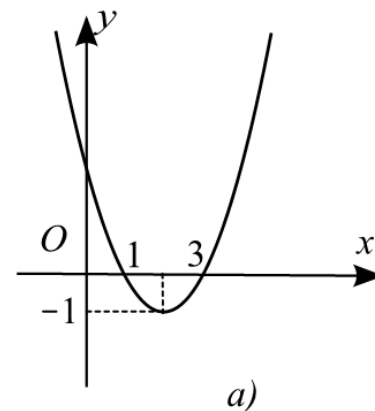
$y = 0$ при $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Этот график изображен на рисунке 16а.

Чтобы построить график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$, отразим относительно прямой Ox те части параболы, что лежат ниже оси абсцисс. Получим искомый график (см. рис. 16б).

$y = a$ — прямая, параллельная оси абсцисс или совпадающая с ней.

По рисунку видно, что ровно две общие точки графики имеют при $a = 0$, $a > 1$.

Ответ: $\{0\}, (1; +\infty)$.



№23. $y = |x^2 - 4x + 3|$ $a = ?$ 2 m.

1) $y = x^2 - 4x + 3$

$x_0 = 2,$

$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3$

$y_0 = -1$

$(2; -1)$

x	0	1
y	3	0

2) $y = -x^2 + 4x - 3$

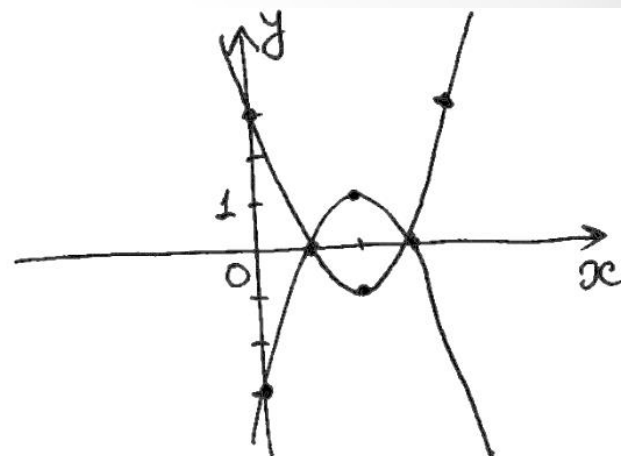
$x_0 = 2,$

$y_0 = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3$

$y_0 = 1$

$(2; 1)$

x	0	1
y	-3	0



Ответ: $a > 1, a < -1, a = 0.$

Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как график построен неверно.

23. Постройте график функции $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно 4 общие точки.

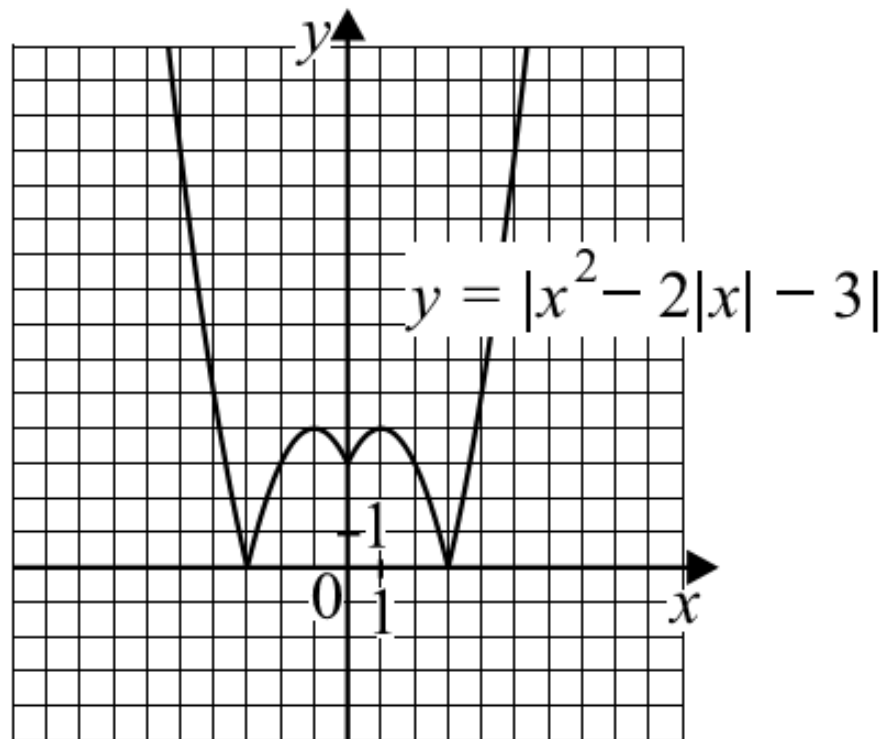
Решение:

23. 1) Функция $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ — чётная, график функции симметричен относительно оси Oy .

2) Построим график функции $y = x^2 - 2x - 3$ при $x \geq 0$. Получим часть параболы с вершиной в точке $(1; -4)$.

3) Для получения графика функции $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ при $x \geq 0$ надо отобразить часть графика на отрезке $[0; 3]$ симметрично относительно оси Ox .

4) Для получения графика функции $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ необходимо отобразить часть графика на интервале $x > 0$ симметрично относительно оси Oy .



5) Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно 4 общие точки при $c \in \{4\} \cup (0; 3)$.

Ответ: $\{4\} \cup (0; 3)$.

Система подготовки к решению задач с параметром

Необходимо уметь

- 1) Выполнять преобразования алгебраических выражений
 - Приводить подобные
 - Раскладывать на множители
 - Сокращать дроби
 - Находить область допустимых значений переменной
- 2) Строить и читать графики функций
 - Линейной
 - Квадратичной
 - Обратно-пропорциональной ($y=k/x$)
 - Модуля (уметь преобразовать модуль в кусочную функцию, уметь преобразовывать график $y = f(x)$ в графики $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$)

- Кусочной функции, состоящей из участков вышеуказанных
- 3) Решать уравнения, неравенства и системы
 - Линейные
 - Второй степени
 - 4) Строить и исследовать простейшие математические модели
 - Исследовать уравнение на предмет числа корней
 - Исследовать поведение линейной функции в зависимости от значений коэффициентов
 - Выстраивать алгоритм, позволяющий решить задачу с параметром



Материал, представленный в данном пособии, предназначен для формирования навыков в решении заданий с параметром. Книга основана на материале по математике 7 - 9 классов и состоит из 10 параграфов, каждый из которых посвящён определённым типам задач и способам их решения.

Также пособие содержит упражнения для самостоятельной работы и ответы к ним.

Предлагаемое издание адресовано учащимся старших (8-11) классов общеобразовательных учреждений и учителям математики

- §1. Решение линейных уравнений с параметром
- §2. Решение линейных неравенств с параметром
 1. Линейные неравенства
 2. Системы линейных неравенств
- §3. Графики уравнений на плоскости Oxy
 1. Уравнение прямой
 2. Взаимное расположение прямых на плоскости.
Системы линейных уравнений
 3. График функции $y=k/x$
 4. Окружность
 5. Парабола
 6. Кусочные графики

- §4. Графики неравенств
 1. Уравнение полуплоскости
 2. Уравнение круга и другие неравенства
- §5. Квадратные уравнения с параметром
- §6. Разложение квадратного трёхчлена на множители. Формулы Виета
- §7. Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек
 1. Поиск корней и ограничения
 2. Сравнение корней с нулём
 3. Расположение корней квадратичной функции

- §8. Дробно-рациональные уравнения. Отбор корней
- §9. Использование свойств функций и алгебраических выражений
 1. Использование симметрии алгебраических выражений
 2. Использование монотонности функций
 3. Использование ОДЗ и оценка множества значений
- §10. Задачи [с модулем](#)

Рабочую программу элективного курса «Задачи с параметрами» 8-9 класс (ФГОС) можно бесплатно скачать на сайте издательства

<http://www.legionr.ru/workprogramms/>

СКИДКА 15%

**на все пособия по математике и
информатике**

Действует до 10:00 21.04.2017

**При заказе в интернет-магазине
ВВЕСТИ ЭТОТ КОД:**

CP-UZPY5-92GA57V

Спасибо за
внимание!

Электронные ресурсы

Пособия для подготовки к ОГЭ

<http://legionr.ru/books/filter.php>

ФИПИ Демоверсии, спецификации, кодификаторы

<http://www.fipi.ru/oge-i-gve-9/demoversii-specifikacii-kodifikatory>

ФИПИ Для предметных комиссий субъектов РФ

<http://www.fipi.ru/oge-i-gve-9/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf>

Открытые банки ГИА <http://mathgia.ru>

<http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-oge>